Russell et l'Universal Algebra de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903)

Sébastien Gandon

Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903)[1]

Sébastien Gandon, EA Philosophie et Rationalités / Université Clermont II.

RESUME : Cet article a pour objectif de réinsérer les analyses que Russell consacre à la géométrie dans le contexte des discussions sur les fondements de la géométrie à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Plus précisément, il vise d'abord à retracer l'influence du premier ouvrage de Whitehead (*A Treatrise on Universal Algebra*, 1898) sur les conceptions russelliennes de la géométrie ; il vise ensuite à établir que le concept géométrique fondamental n'est pas pour Russell le concept d'ordre, mais celui d'incidence. Les deux thèses sont intimement liées. C'est en effet la présentation ambiguë que Whitehead propose de la géométrie projective qui contraint Russell, autour de 1898-1899, à définir plus précisément ce qu'il entend par « méthode purement projective », et à développer un système axiomatique qui n'admet comme unique relation primitive que la relation d'incidence. S'appuyant sur l'œuvre de Pieri, Russell continue en 1903 dans les *Principles* à définir la géométrie, non comme une théorie générale de l'ordre, mais comme une théorie générale des relations d'incidence. Les relations d'incidence jouent ainsi un rôle fondamental et méconnu dans la pensée russellienne.

ABSTRACT : The purpose of this paper is to fit the russellian analysis of geometry into the context of the debate about the foundation of geometry at the end of the XIXth century. More precisely, this article firstly aims at describing the influence of Whitehead's first book (*A Treatrise on Universal Algebra,* 1898) on the Russellian account of geometry. It secondly aims at showing that, for Russell, the primitive geometrical notion is not order, but incidence. The two thesis are not unrelated. It is the ambiguity of Whitehead's presentation of projective geometry which compels Russell around 1898-1899 to redefine the nature of the « real projective method » more precisely, and to build an axiomatic system in which the only primitive relation is incidence. Leaning on the recent work of Pieri, Russell still defines geometry in the Part VI of the *Principles* (1903) not as a general theory of order but as a general theory of incidence relations. Thus incidence relations have an important if unrecognised part to play in the russellian thought.

Mots clés : histoire de la géométrie, ordre, incidence, Russell, Whitehead, Grassmann

Classification AMS : 01A55, 01A60, 51-03.

On peut distinguer trois étapes dans l'évolution de la réflexion russellienne sur les fondements de la géométrie dans la période précédant la publication des *Principles* (1903) : une phase initiale (1896-1897), pendant laquelle Russell rédige *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897) ; une phase intermédiaire (1898-1899), qui se conclut par la publication dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* de sa réponse à l'article de Poincaré, intitulée *Sur les Axiomes de la Géométrie* [Russell 1899c][2] ; une phase finale (1900-1903), pendant laquelle il élabore le livre VI des *Principles* (1903), dont les travaux de Pieri et, plus généralement, des géomètres italiens, en constituent la référence majeure [Russell 1903]. Par contre, les origines et les motivations de l'étrange axiomatisation que Russell expose dans sa réponse à Poincaré, ainsi que celles des diverses réflexions sur la géométrie que la publication

[1] J'aimerais remercier les rapporteurs dont les remarques, critiques et suggestions ont permis de remanier une première puis une seconde version de cet article. Je tiens également à remercier L. Haddad et Y. Perrin qui n'ont pas ménagé leur temps pour répondre avec clarté aux questions, souvent confuses, que je leur posais.

[2] Le texte, intitulé *Sur les Axiomes de Géométrie* paraît dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* en novembre 1899. Il constitue une réponse à l'article de Poincaré publié quelques mois avant dans la même revue. Il existe une version anglaise plus longue et plus complète de l'article de Russell [1899d], à laquelle nous nous référerons ici le plus souvent.

du second volume des *Collected Papers* a rendues récemment accessibles[3], sont, elles, plus difficiles à déterminer. Ce qui frappe, c'est à la fois le caractère mathématiquement très achevé des conceptions russelliennes (la phase « intermédiaire » est de ce point de vue beaucoup moins hésitante et approximative que la phase initiale) et le fait que celles-ci soient moins d'un an après, complètement abandonnées. Quelle est l'origine des analyses russelliennes de 1898-1899 ? A quel genre de pratique mathématique renvoie Russell dans sa réponse à Poincaré ?

La question ne semble pas avoir suscité beaucoup d'intérêt chez les commentateurs. N. Griffin affirme que la tentative russellienne trouve sa source chez L. Cremona [Griffin 1990, p. 137]. La conjecture se fonde sur la similitude existant entre les notations des deux auteurs. Mais, comme nous le verrons, le rapprochement n'explique pas le tour très algébrique que Russell donne à sa présentation. R. Toretti [1978], lui, rend à Russell l'hommage ambigu d'être parvenu seul et de façon autonome à une précision dans l'expression et dans la formalisation qui le rapproche des plus grands de ses contemporains[4]. Mais la simple lecture du « système » russellien exposé en 1899 montre à quel point il ne peut supporter la comparaison avec les grandes œuvres de Pieri et de Hilbert.

Nous voudrions établir que la source d'inspiration principale de Russell, dans cette période charnière qui précède immédiatement la rencontre avec l'école italienne, est le volumineux *Treatrise on Universal Algebra* de Whitehead, que le jeune philosophe lit dès sa parution, en 1898[5]. Cette œuvre est, comme nous le verrons, la véritable origine du mystérieux système ébauché par Russell [1899c]. Plus généralement, le détour par Whitehead permet de déterminer la nature exacte des problèmes alors rencontrés par Russell. Il rend ainsi possible une appréhension plus fine des rapports entre le questionnement russellien et les discussions qui lui sont contemporaines sur les fondements de la géométrie. Il permet également de mieux comprendre la phase ultérieure, celle de la rédaction des *Principles* et de la réception de l'œuvre de Pieri et de Peano. L'intérêt que Russell manifeste pour les italiens ne s'explique en effet pas seulement par leur usage d'une notation enrégimentée. Pieri est, pour l'auteur des *Principles*, celui qui répond à la question que Whitehead a laissée en suspens – celle de la vraie nature de la méthode purement projective.

Dans la première partie de cet article, nous situerons l'ouvrage de Whitehead dans le contexte du débat sur les fondements de la géométrie qui traverse la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est sur le contenu des livres III et IV du traité de Whitehead [1898] (intitulé respectivement « *Positional Manifolds* » et « *The Calculus of Extension* ») que portera la seconde partie. Nous verrons que, influencé par Grassmann, l'auteur subordonne le traitement de la géométrie projective à la division entre multiplicité positionnelle et calcul de l'extension. Dans un troisième moment, nous montrerons comment le système axiomatique développé par Russell dans la version anglaise de son article [1899c] constitue à la fois une reprise et une critique des thèses de Whitehead. L'auteur de *An Essay* refuse que le contenu de la géométrie projective soit démembré en deux systèmes distincts, et il fonde, dans l'article de 1899, sa présentation sur le seul calcul de l'extension compris comme une théorie pure des relations d'incidence. Mais Russell, dans le même temps, comme pris de remords, juxtapose à cet ensemble cohérent de recherches, des développements complètement différents, consacrés

[3] Il s'agit de [Russell 1898a, 1898b, 1898c, 1898d, 1899a, 1899b].

[4] [Toretti 1978, p. 307] : « [Russell reconnut que Poincaré avait eu raison de critiquer sa prétendue axiomatisation de l'*Essai*] et proposa un nouvel ensemble de six axiomes. Ceux-ci sont énoncés avec une grande précision. […] Ils sont conçus selon les canons de l'idée moderne de théorie déductive, telle qu'elle est développée par Pasch et l'école italienne. (Ceci montre, incidemment, que Russell n'a pas dû attendre, comme certains le suggèrent, le Congrès de Paris de 1900, pour connaître cette conception – ou pour la développer par ses propres moyens). »

[5] Il faudrait même dire « avant sa parution ». Dans la préface de son livre (p. xi), datée de décembre 1897, Whitehead remercie Russell d'avoir relu certaines parties de l'ouvrage, notamment celles consacrées à la géométrie non euclidienne. Pour une évaluation globale de l'impact de [Whitehead 1898] sur Russell et Whitehead, voir [Grattan-Guinness 2002].

aux relations entre géométrie projective et multiplicité positionnelle entendu comme théorie générale des séries. Nous nous pencherons, dans une quatrième partie, sur ces textes, qui manifestent l'existence d'une très profonde tension dans la pensée du philosophe. Russell fonde, à cette époque, la géométrie projective sur les relations d'incidence, sans pour autant renoncer à l'idée qu'il y a un lien essentiel entre la géométrie projective et les séries, c'est-à-dire les relations d'ordre. C'est seulement dans la partie VI des *Principles*, étudiée dans un cinquième et dernier moment, que Russell parvient à concilier les deux points de vue. Le philosophe y maintient l'approche adoptée dans sa précédente réponse à Poincaré selon laquelle la seule notion projective fondamentale est l'incidence ; mais il s'appuie dorénavant sur Pieri pour définir l'ordre à partir de l'incidence, et développer sur cette base l'ensemble de la géométrie projective classique. Dans le système développé par Pieri, il y a, certes, des axiomes d'ordre (trois postulats dont le seul but est de garantir que le concept ordinal de segment possède les propriétés adéquates) ; mais, nous y reviendrons, ces énoncés ne forment pas un groupe d'axiomes définissant le contenu d'un terme primitif (comme c'est le cas habituellement depuis Hilbert) ; la notion de segment est en effet chez Pieri dérivée à partir des seules relations d'incidence.

1- L'*Universal Algebra* et la question des fondements de la géométrie à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle

Whitehead entre Grassmann et Klein

Entre 1871 et 1874, Klein publie dans les *Mathematischen Annalen* une très importante série d'articles qui posent le cadre dans lequel les discussions autour des fondements de la géométrie se développeront à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Généralisant l'approche de Cayley, Klein définit la distance entre deux points A et B (resp. l'angle entre deux droites a et b) dans l'espace projectif (tridimensionnel) comme le logarithme du birapport de A et B relativement aux deux points d'intersection de la droite AB et d'une quadrique fondamentale, l'Absolu (resp. de deux droites a et b relativement aux deux droites du faisceau ab tangentes à l'Absolu). Autrement dit, Klein identifie le groupe des déplacements des trois géométries classiques avec le groupe des transformations homographiques qui laissent une surface particulière invariante. Chaque géométrie est donc, à l'intérieur de l'espace projectif complexe, spécifiée par le type de figure considérée comme Absolu : lorsque la surface fondamentale est une quadrique imaginaire à coefficients réels, le groupe de transformation correspond à celui des déplacements elliptiques ; lorsque l'invariant est une quadrique réglée, le groupe sélectionné est le groupe des déplacements hyperboliques ; enfin, lorsque l'Absolu dégénère en une section conique (le cercle imaginaire à l'infini), le groupe de transformation est euclidien. Les relations métriques entre des points (des droites) quelconques sont donc considérées comme des relations mettant en jeu ces points (ces droites) et une quadrique fondamentale (l'Absolu) au sein de l'espace projectif ; selon le type de surface fondamentale, la géométrie sera hyperbolique, elliptique ou euclidienne.
L'importance des définitions de Klein tient à ce qu'elles permettent de définir la géométrie projective comme la matrice des diverses géométries métriques. Aux yeux du mathématicien allemand, la construction des modèles projectifs manifeste la véritable nature (« *inneres Wesen* ») des géométries euclidienne et non-euclidiennes, qui ne sont que l'étude d'un sous-groupe du groupe projectif. Même s'il est possible, en suivant Toretti [1978, p. 130], d'émettre quelque réserve sur l'interprétation développée, on ne peut que souligner le retentissement considérable de cette approche sur la question des fondements de la géométrie. De très nombreux auteurs ont repris l'idée que la géométrie projective constituait une géométrie générale et fondamentale, englobant sous un même chapeau la géométrie

hyperbolique, elliptique et euclidienne. En Angleterre notamment, où la tradition synthétique euclidienne était très forte[6], cette interprétation connût un énorme succès. Russell [1897a, p. 17-53] distinguait ainsi trois étapes dans l'évolution de la géométrie au XIX$^{\text{ème}}$ siècle : une première phase, inaugurée par Gauss et poursuivie par Bolyai et Lobatchevsky, établit l'indépendance de l'axiome des parallèles par rapport aux autres en développant synthétiquement une axiomatique de la géométrie hyperbolique ; une seconde période, initiée par Riemann, différencie les diverses géométries par des moyens purement analytiques (le concept de multiplicité numérique et de courbure étant la clé de voûte de l'édifice riemannien) ; un troisième et dernier moment, qui débute avec les articles de Klein, présente les diverses géométries métriques comme étant contenues dans une théorie plus fondamentale : la géométrie projective. Aux conceptions de Riemann, présentées comme une généralisation de la géométrie analytique, Russell préfère la démarche synthétique et géométrique de Klein, dans laquelle la métrique est dérivée des relations non numériques entre entités géométriques au sein de l'espace projectif[7].

Whitehead reprend, dans le livre VI de son *Treatrise on Universal Algebra with Applications* (1898), les définitions kleiniennes de la *Massbestimmung* [Whitehead 1898, p. 349-354] et la description russellienne de l'évolution de la géométrie [*Ibid.*, p. 369-370]. Mais cette thèse s'inscrit chez lui dans un mouvement de pensée plus vaste : celui d'une reprise et d'un développement des algèbres grassmaniennes. H. Grassmann est connu pour avoir jeté les bases de l'algèbre linéaire moderne. Il définit ainsi dans ses deux *Ausdehnungslehre* [Grassmann 1844, 1862] les concepts d'espace vectoriel, de base et de dimension, et les opérations de produit vectoriel et de produit scalaire[8]. Comme nous le verrons, ces différentes notions sont abondamment réutilisées par Whitehead [1898]. Grassmann avait élaboré ces concepts algébriques à l'occasion d'une recherche très ambitieuse visant à élaborer une nouvelle branche des mathématiques « qui engendrerait d'une façon purement abstraite, des lois similaires à celles qui, en géométrie, sont liées à l'espace » [Grassmann 1844, p. 10]. L'*Ausdehnungslehre* était une tentative pour libérer la pensée de toute référence à l'intuition spatiale tridimensionnelle, et pour dégager le fond purement conceptuel des notions géométriques fondamentales.

Whitehead affirme à plusieurs reprises que ce projet est encore le sien, et que les algèbres élaborées par Grassmann permettent de le mener à bien[9]. Mais si Whitehead cherche toujours à développer une théorie qui engendre de façon purement abstraite « des lois similaires à celles qui en géométrie sont liées à l'espace », il refuse de restreindre, comme le mathématicien allemand l'avait fait avant lui, l'objet de la nouvelle science à une généralisation à n dimensions de l'espace euclidien. Identifier la théorie de l'extension pure à la géométrie euclidienne, même généralisée, n'est plus possible, à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, après Riemann, Helmholtz et Beltrami. Reprenant les travaux de Klein, Whitehead tente de montrer que la science de l'extension est une théorie pure de l'espace projectif de dimension n. Après avoir exposé le concept central de *positional manifold*, Whitehead [1898, p. 132] affirme :

> Les théorèmes de la géométrie projective étendus à un nombre quelconque de dimensions peuvent être déduits comme des conséquences nécessaires des définitions d'une multiplicité positionnelle[10].

[6] Voir sur ce point [Richards 1988].

[7] Sur cette dérivation, voir [Russell 1897a, p. 36-49] et pour un commentaire [Nabonnand 2000].

[8] Sur Grassmann, voir [Schubring 1996] et [Flament 2003].

[9] [Whitehead 1898, p. 32] : « [Le] Traité sur l'Algèbre Universelle est également, dans une certaine mesure, un traité sur certaines idées généralisées de l'espace ». Voir également la préface : « Nous espérons, dans cette œuvre, présenter les algèbres à la fois comme des systèmes de symbolisme et également comme des dispositifs permettant l'examen des possibilités de penser et de raisonner liées à l'idée générale et abstraite d'espace. »

[10] Toutes les traductions de Whitehead et de Russell qui suivent sont les nôtres ; nous joignons en note le texte original. « The theorems of Projective Geometry extended to any number of dimensions can be deduced as necessary consequences of the definitions of a positional manifold. »

Transformer les algèbres grassmaniennes afin d'en faire une science pure de l'extension, c'est-à-dire une théorie pure des espaces projectifs, tel est le but que s'assigne Whitehead dans son ouvrage.

Le projet du philosophe-mathématicien s'inscrit donc aux confluents de deux courants de pensée très distincts et bien déterminés : la tradition du calcul géométrique dont Grassmann est, avec Hamilton, le plus grand représentant et l'approche à la Cayley-Klein des géométries métriques en terme projectif. Citons la *Note Historique* du chapitre 1 du livre VI [Whitehead 1898, p. 370], très claire :

> L'idée de commencer une géométrie métrique « pure » par une série de définitions se référant à une multiplicité positionnelle est obscurément présente dans le *Sixth Memoir on Quantics* de Cayley ; elle est explicitement élaborée par Homersham Cox et par Sir R. S. Ball [...]. Sir R. S. Ball se restreint lui-même aux trois dimensions, et utilise l'idée grassmanienne de l'addition de points, mais n'emploie aucune des formules grassmanniennes de multiplication. Mais l'idée générale d'une pure science de l'extension, fondée sur de pures définitions conventionnelles, qui inclurait comme un cas spécial la géométrie de l'expérience ordinaire, est clairement énoncée dans l'*Ausdehnungslehre* de 1844 de Grassmann.[11]

Whitehead joue Grassmann contre lui-même : le mathématicien allemand n'a pas appliqué ses algèbres aux géométries non-euclidiennes, et en cela, le projet de fonder une science purement conceptuelle de l'espace doit être repris ; mais le projet lui-même, l'idée générale d'une « pure science de l'extension », a été formulé pour la première fois par Grassmann, et seulement confusément perçu par ceux qui, ensuite, ont développé les nouvelles géométries.

L'incomplétude du programme de Staudt et la question de la nature de la géométrie projective

L'unification de deux démarches aussi différentes que celle de Klein et de Grassmann ne va pas sans créer de très nombreuses tensions. Comme nous le montrerons, Whitehead ne parvient pas véritablement à déterminer de façon précise ce qu'il entend par géométrie projective. Le point est pourtant crucial dans la perspective ouverte par Klein. La démarche consistant à définir les diverses géométries métriques à partir de la géométrie projective n'a en effet de sens que si l'on est en mesure de caractériser univoquement, et indépendamment de toute référence à la *Massbestimmung*, ce qui relève de la théorie projective. Or l'élaboration d'une telle définition n'est pas évidente, et suscite, dès la parution du premier article de Klein, d'intenses recherches. Avant d'examiner le traitement que Whitehead réserve à la géométrie projective, il n'est pas inutile de décrire plus précisément la situation.

Le mathématicien allemand définit la notion de distance à partir du concept de birapport ; or le birapport entre deux paires de points est, à l'époque, déterminé comme un rapport de rapport des distances. Plus généralement, l'ensemble de la dérivation est mené par Klein à l'aide d'un système de coordonnées homogènes défini sur l'espace projectif ; or comment introduire un tel système sans faire référence à une notion euclidienne de distance ? Klein soulève lui-même ces questions à la fin de son premier article [Klein 1871, p. 304] et en appelle, pour y répondre, à l'œuvre de G. von Staudt. Dans sa *Geometrie der Lage* (1847) et dans *Beiträge* (1856-1860), le mathématicien parvient à construire, par des moyens purement géométriques, un système de coordonnées homogènes dans un espace projectif. La base de son raisonnement est la démonstration de l'unicité de la construction du quadrilatère, qui

[11] « The idea of starting a 'pure' Metrical Geometry with a series of definitions referring to a Positional Manifold is obscuretly present in Cayley's *Sixth Memoir on Quantics*; it is explicitely worked out by Homersham Cox and by Sir R. S. Ball [...]. Sir R. S. Ball confines himself to three dimensions, and uses Grassmann's idea of the addition of points, but uses none of Grassmann's formulae for multiplication. But the general idea of a pure science of extension, founded upon conventional definitions, which shall include as a special case the geometry of ordinary experience, is clearly stated in Grassmann's *Ausdehnungslehre von 1844*. »

permet de déterminer de façon purement projective le quatrième harmonique d'un point quelconque par rapport à une paire quelconque de points sur une droite[12].
Dès son second article, Klein revient sur la question [1873, p. 337-339]. Il note, dans la seconde partie de son texte, que la construction de Staudt n'est en réalité pas indépendante du postulat des parallèles : pour faire coïncider chaque élément d'un faisceau de droites à un point d'une droite dans le plan, il faut présupposer que chaque élément du faisceau coupe la droite en un point – ce qui exclut par exemple que le plan soit hyperbolique. Pour s'affranchir d'une telle hypothèse, Klein [1873, p. 332] ne se donne qu'un espace limité [*gegebenen begrenzten Raum*]. Dans ce cadre plus contraignant, il prouve d'abord [*Ibid.*, p. 335-336] l'unicité de la construction du quadrilatère, ce qui lui permet de définir purement projectivement l'harmonicité entre deux paires d'éléments d'une forme de première espèce (système linéaire de points, faisceau de droites ou de plans). Il stipule ensuite [*Ibid.*, p. 337], à la façon de Staudt, qu'une relation entre deux formes de première espèce est homographique lorsque qu'elle fait correspondre quatre éléments harmoniques quelconques de la première à quatre éléments harmoniques quelconques de la seconde.
Arrivé à ce stade, Klein souligne l'existence d'une lacune dans la construction de son prédécesseur. Il remarque que l'on ne peut pas, comme le croyait Staudt, dériver le théorème fondamental de géométrie projective (selon lequel une relation projective est déterminée lorsque les images de trois points sont déterminées) de la seule définition de la relation homographique[13]. La démonstration usuelle, rappelée dans [Klein 1873, p. 338], passe (dans le cas d'un système linéaire) par la construction d'un réseau de points (appelé système harmonique) par itération successive de la construction du quadrilatère à partir de trois points donnés[14]. Dans la preuve, Staudt estimait qu'à partir du moment où une correspondance était définie entre deux systèmes harmoniques, elle était définie sur les deux droites qui les supportent. C'est cette thèse que Klein remet en question. L'argument de Staudt selon lequel il est toujours possible de construire un point entre deux points quelconques du système harmonique n'est en effet pas suffisant : cette propriété n'interdit pas de penser que « le processus ininterrompu de positionnement du quatrième point harmonique ne dépasse jamais une limite déterminée, sans pour autant atteindre une dernière position » [*Ibid.*, p. 338][15]. En terme plus contemporain, que le système harmonique possède cette propriété ne signifie pas qu'il soit dense sur la droite. Or seule la densité sur la droite nous permet de dériver le théorème fondamental de la géométrie projective, et avec lui l'ensemble de l'édifice projectif classique.
Quelque temps après la publication du texte de F. Klein, Lüroth et Zeuthen réussirent, en admettant un équivalent de l'axiome de Dedekind pour les formes de première espèce, à compléter la démonstration de Staudt [Klein 1874, p. 346-349], c'est-à-dire à montrer « qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions successives du quatrième point harmonique, les trois

[12] Pour une description de la construction du quadrilatère, voir section 3 *infra*. Staudt introduit les coordonnées grâce à sa théorie des « *Würfe* » qui diffère de la manière dont Klein construit son propre système. Brièvement dit, Staudt définit les opérations d'addition et de multiplication de façon purement géométrique, ce qui permet de construire un système de coordonnées (voir [Coxeter 1947, chap. 4]) ; Klein construit lui directement une *Skala* numérique, sans introduire préalablement une algèbre [Klein et Rosemann 1928, p. 157-163]. Comme Klein ne le fait pas lui-même, nous ne distinguerons pas, dans la suite, les deux procédures.
[13] Pour une description précise et accessible de la situation mathématique, voir [Whitehead 1906] p. 19-23, et p. 24-33 ; voir également [Coxeter 1949] p. 137-144. Whitehead souligne que le théorème de Pascal ne peut pas être prouver si on en reste au cadre élaboré par Staudt.
[14] Plus précisément, Coxeter [1949, p. 139-140] définit un système harmonique comme « étant le plus petit ensemble de points tel que, trois quelconques de ses éléments étant donnés, le conjugué harmonique de chacun relativement aux deux autres lui appartient. »
[15] « Es wäre denkbar, dass der fortgesetze Prozess der Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes über eine bestimmte Grenze nicht hinausführte, ohne doch eine letze Lage für den Punkt zu erreichen. »

premiers étant donnés »[16]. L'élément qui « entre » dans le segment ou l'angle n'est pas construit dans la démonstration ; son existence est simplement prouvée par la considération des relations ordinales qu'entretiennent certains ensembles harmoniques de points construits. La preuve de Lüroth et Zeuthen montre donc clairement que, pour achever le programme de Staudt, il faut avoir recours à des considérations ordinales et à un axiome de continuité (qui lui-même met en jeu une relation d'ordre), et qu'il est impossible de se contenter de répéter indéfiniment la construction du quadrilatère.

Récapitulons. A la question : que sont les géométries non-euclidiennes ? – Klein répond dans son premier article de 1871 : l'étude d'un sous-groupe du groupe des transformations homographiques. Sa réponse déplace le problème et suscite une nouvelle interrogation : quelle est la véritable nature de la géométrie projective ? La dernière question recèle de grandes difficultés, que l'invocation commode de l'œuvre de Staudt, Klein s'en aperçoit petit à petit, ne fait que dissimuler. Selon Klein [1873, p. 330], Staudt pensait que « la construction de la géométrie projective s'effectue […] en ne considérant simplement que les relations d'entre-appartenance des plans, des droites et des points »[17]. Dans une telle perspective, la géométrie projective avait un statut clair et des procédures bien définies (toutes fondées sur la construction du quadrilatère) – les relations d'incidence entre formes de différents niveaux constituaient le contenu (non métrique) de la nouvelle théorie. L'échec du programme de Staudt remet tout en question. Il manifeste de façon spectaculaire que la géométrie projective ne peut pas être développée à partir des seuls rapports d'entre-appartenance entre plans, droites et points, et pose à nouveau frais le problème du statut de la discipline. Que faut-il ajouter aux relations d'incidence pour achever le programme de Staudt ? La question est délicate car l'interdit originel demeure : ne pas introduire de notion métrique en géométrie projective.

Le problème de la nature de « la méthode vraiment projective », posé par Klein, traverse toute la fin du XIX^{ème} siècle mathématique. Il est au centre de très nombreux travaux et reçoit des traitements extrêmement divers. M. Pasch [1882, p. 122-123] établit ainsi une distinction entre les concepts et les théorèmes de la théorie projective ; s'il est possible de définir l'ensemble des concepts projectifs sans recourir à des relations métriques, le mathématicien allemand considère que l'introduction de la relation de congruence est nécessaire à la preuve des théorèmes projectifs. F. Enriques [1898][18], suivi par Veblen et Young [1910 ; 1918], distingue lui, au sein de la géométrie projective, entre des axiomes d'incidence et des axiomes d'ordre. M. Pieri [1898], traducteur de Staudt, est celui entre tous qui reste le plus fidèle à l'esprit du programme de la *Geometrie der Lage* : il réussit à introduire une relation ordinale de séparation sur la droite projective à partir de la seule relation d'incidence[19].

Cette brève évocation ne prétend pas à l'exhaustivité[20] ; elle vise simplement à manifester à quel point le retentissement des articles de Klein était alors important. Le mathématicien allemand a su poser une question cruciale, à la fois sur le plan technique (comment prouver le théorème fondamental sans introduire de concepts métriques ?) et sur le plan philosophique (puisque la géométrie projective, dont dérive l'ensemble des géométries classiques, ne peut être réduite à l'étude des rapports d'incidence, quelle est sa nature ?).

On ne peut, de ce point de vue, que s'étonner du silence de Whitehead en 1898. Le philosophe souligne bien l'indépendance de la géométrie projective par rapport à la géométrie métrique [Whitehead 1898, p. 132, 349] mais il s'arrête là, et ne pose jamais vraiment la question,

[16] Lettre de Zeuthen citée (en français) par Klein [1874, p. 348].

[17] « Der Aufbau des projektivischen Geometrie geschieht, bei Staudt wie bekannt, durch blosses Betrachten des Ineinanderliegens von Ebenen, Geraden und Punkten. »

[18] Sur Enriques, voir [Brigaglia 2002 p. 395-399].

[19] Sur Pieri [1898], voir *infra*. section 5.

[20] Les *Grundlagen* de Hilbert proviennent (en partie) du désir de régler définitivement la question ; voir sur ce point [Toepell 1986].

pourtant fort débattue à l'époque, de la nature de la géométrie projective elle-même. En réalité, comme nous allons maintenant le voir, l'approche algébrique de Whitehead fait écran et masque en partie la réalité du problème.

2- L'éparpillement de la géométrie projective et la question de la nature de l'intensité dans l'*Universal Algebra*

Un des traits singuliers de la présentation de Whitehead [1898] par rapport à celle de Grassmann [1862] est la scission en deux unités bien distinctes des algèbres additives et des algèbres multiplicatives. C'est au livre III de son traité que l'auteur expose la théorie des multiplicités positionnelles ; c'est seulement au livre IV qu'il présente le calcul de l'extension et les règles qui gouvernent le produit entre extraordinaires[21]. Cette division, absente de la seconde *Ausdehnungslehre* où Grassmann combine le plus souvent addition et multiplication, joue un rôle fondamental dans notre perspective parce qu'elle retentit sur l'analyse que Whitehead propose de la géométrie projective. Dans *Universal Algebra*, les références à la nouvelle géométrie sont en effet éparpillées dans le livre III et le livre IV, et aucune caractérisation unitaire de la méthode projective n'est véritablement dégagée. Avant d'examiner les conséquences de cette présentation sur la question des fondements de la géométrie, nous allons décrire succinctement le contenu des livres III et IV.

La multiplicité positionnelle

Qu'est-ce tout d'abord qu'une *positional manifold* ? Le mathématicien en offre la caractérisation suivante :

> Dans toutes les algèbres du genre numérique […], n'importe quel élément de la multiplicité […] peut être exprimé sous la forme $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu$, où $e_1, e_2 \ldots e_\nu$ sont ν éléments de cette multiplicité, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ sont des nombres, où nombre signifie ici une quantité de l'algèbre ordinaire, réelle ou imaginaire. [Whitehead 1898, p. 119] [22]

Une multiplicité positionnelle est ainsi assimilable à ce que l'on appelle un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels (ou des complexes)[23]. Les α correspondent à nos scalaires ; les e à nos vecteurs (suivant l'usage introduit par Cayley, Whitehead les nomme extraordinaires). Whitehead, suivant Grassmann [1862], définit dans le reste du chapitre 1 du livre III les principales notions de l'algèbre linéaire. Sont ainsi passés successivement en revue les concepts d'indépendance linéaire, de base et de dimension d'un espace vectoriel, de sous-régions (les sous-espaces vectoriels), d'intersection et d'union de sous-régions, de projection d'un élément sur une sous-région.
Whitehead se distingue cependant des présentations grassmanienne et contemporaine en ce qu'il n'identifie pas la dimension d'une région au nombre de vecteurs de sa base. La dimension d'une multiplicité engendrée par ν extraordinaires indépendants est ν-1 [Whitehead 1898, p. 123] et non pas ν, comme chez Grassmann[24]. Une telle interprétation

[21] Le terme d'extraordinaire, repris par Whitehead à Cayley, désigne toutes les quantités qui ne sont pas « ordinaires », c'est-à-dire qui ne sont pas numériques. Comme nous le verrons, les extraordinaires jouent le rôle des vecteurs (par opposition aux scalaires) dans les espaces vectoriels.

[22] « In all algebras of the numerical genus [...] any element of the algebraic manifold [...] can be expressed in the form $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu$, where $e_1, e_2 \ldots e_\nu$ are ν elements of this manifold and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ are numbers, where numbers here means a quantity of ordinary algebras, real or imaginary. »

[23] A la différence de ce qui se passe aujourd'hui, Whitehead ne distingue cependant pas les deux structures de corps et de groupe commutatif. Selon lui, tous les éléments de la multiplicité ont une quantité propre, leur intensité représentée par un nombre. Dans cette perspective, il parait absurde de considérer les scalaires indépendamment de l'extraordinaire auquel il s'applique – de dire par exemple qu'ils forment un corps.

[24] Dans la première partie de [Grassmann 1844], les « extraordinaires » correspondent à des grandeurs extensives (des segments ou vecteurs) ; dans la seconde partie, les « extraordinaires » sont des grandeurs élémentaires (des points).

revient à introduire sur les multiplicités étudiées un système de coordonnées homogènes : les coefficients d'une somme vectoriel correspondent aux coordonnées du point résultant – ou encore, la position d'un extraordinaire est déterminée, non pas par la valeur des coefficients affectés aux vecteurs origines, mais par la valeur du rapport de ces coefficients[25].

L'avantage d'une telle manœuvre est évident. Dans l'interprétation considérée, multiplicité positionnelle et espace projectif sont directement liés. Immédiatement après avoir énoncé que les théorèmes de la géométrie projective étaient contenus dans les définitions de la multiplicité positionnelle, Whitehead [*Ibid.*, p. 132] soutient :

> N'importe quel point p de la droite aa' peut être écrit sous la forme $\xi a + \xi' a'$, où la position de p est définie par le rapport ξ/ξ'. Si p_1 est un autre point $\xi_1 a + \xi'_1 a'$ sur la même droite, alors le rapport $\xi\xi'_1/\xi'\xi_1$ est appelé le *rapport anharmonique* de l'ensemble [*range*] (aa', pp_1). Il convient de remarquer que le rapport anharmonique d'un ensemble de quatre éléments colinéaires est ici défini sans avoir introduit la moindre idée de distance. Ce rapport est également indépendant des intensités par lesquelles a et a' se trouvent représenter leurs éléments. Car il est évidemment inchangé si a et a' sont remplacés par αa, $\alpha' a'$, α et α' étant des quantités arbitraires.[26]

Déterminer la position d'un point sur une droite par le rapport des coefficients dans la somme vectoriel offre la possibilité de définir très facilement le concept de rapport anharmonique (birapport) entre une paire de points quelconque et la paire de points originaux. Elle permet en outre, selon Whitehead, de manifester le caractère non métrique de la définition : loin de présupposer un concept de distance, le concept de birapport, tel qu'il est introduit ici, ne dépend que de la valeur du rapport des intensités.

L'auteur reprend apparemment à son compte le souci manifesté par Klein dans son article de 1871 : ne pas introduire subrepticement des considérations métriques dans la présentation de la géométrie projective. On est cependant en droit de questionner la force de l'argument. Est-il vrai qu'aucune idée métrique n'intervienne dans la définition donnée du birapport ? Comment, notamment, interpréter les intensités affectées aux différents éléments de la multiplicité ? Möbius, dans son *Calcul Barycentrique*, considérait les scalaires comme des masses associées à des positions. Whitehead ne peut évidemment pas ici adopter un point de vue qui conduit à introduire des éléments mécaniques dans la géométrie pure. Mais il ne précise pas quelle est la signification des intensités ; si les extraordinaires peuvent correspondre aux points d'un espace, aucun statut clair n'est assigné aux coefficients associés. L'usage que Whitehead fait des scalaires dans sa définition du rapport anharmonique semble indiquer que « intensité » désigne tout simplement sous sa plume les valeurs numériques associées aux différents points dans un système de coordonnées homogènes ayant pour origine les extraordinaires de la base. Loin donc de fonder la nouvelle géométrie sur le concept de *positional manifold*, Whitehead ne parvient à donner un contenu à son concept qu'en présupposant l'existence sur la multiplicité d'un système de coordonnées. Contrairement aux apparences, on est donc ici très loin de l'exigence qui anime le programme de Staudt : construire par des moyens purement géométriques le système de coordonnées. Les multiplicités positionnelles ne rejoignent la géométrie projective qu'à un stade très avancé de son développement – qu'au stade où l'espace peut déjà être traité comme une multiplicité numérique.

---

[25] Les coordonnées homogènes sont introduites pour la première fois de façon systématique par Plücker. Elles permettent de formuler analytiquement les principes de la géométrie projective et les propriétés qui en découlent – de donner notamment une expression analytique aux points et à la droite à l'infini en géométrie plane. Voir pour plus de précisions [Klein 1909 p. 86-97]. La manœuvre revient en termes modernes à introduire le projectif d'un espace vectoriel E sur K en quotientant $E\backslash\{O\}$ (O étant l'origine) par la relation d'équivalence $\Re$ définie par $x\Re y \Leftrightarrow \exists\lambda \in K^*,\ y = \lambda x$. Voir pour plus de précision [Lelong-Ferrand 1985, p. 117-122].

[26] « Any point p on the straight line aa' can be written in the form $\xi a + \xi' a'$, where the position of p is defined by the ratio ξ/ξ'. If p_1 be another point, $\xi_1 a + \xi'_1 a'$, on the same line, then the ratio $\xi\xi'_1/\xi'\xi_1$ is called *anharmonic ratio* of the range (aa', pp_1). It is to be carefully noticed that the anharmonic ratio of a range of four collinear elements is here defined apart from the introduction of any idea of distance. It is also independent of the intensities at which a and a' happen to represent their elements. For it is obviously unaltered if a, a' are replaced by αa, $\alpha' a'$, α and α' being any arbitrary quantities. »

Le calcul de l'extension et la définition du produit régressif

Dans le livre IV, Whitehead introduit une nouvelle opération : le produit entre extraordinaires. Suivant encore Grassmann, l'auteur explique que le trait fondamental d'un produit est sa distributivité par rapport à l'addition [Whitehead 1898, p. 26]. De cette distributivité, il suit que définir un produit sur une multiplicité positionnelle dont la base est constituée de ν extraordinaires e_i revient à définir les $\nu\,!$ produits e_ie_j [*Ibid.*, p. 171]. Whitehead montre que, si l'on exige que la définition du produit dans une *manifold* soit indépendante du choix de la base, alors seuls deux types de définitions (deux types d'« équations de condition invariantes ») sont possibles [*Ibid.*, p. 172] :

(1) $e_ie_j + e_je_i = 0$

(2) $e_ie_j = e_je_i$

L'auteur ne s'intéresse, dans le reste du livre IV, qu'au premier type de produit. Il prouve [*Ibid.*, p. 175] que, si l'on multiplie de cette manière ρ fois les extraordinaires d'une multiplicité de ν-*1* dimensions, on obtient une multiplicité positionnelle dérivée, dite du $\rho^{ème}$ ordre, dont la base contient $\nu\,!/(\nu-\rho)\,!\rho\,!$ extraordinaires indépendants.

Dans l'important paragraphe 95 [*Ibid.*, p. 177], Whitehead donne une interprétation géométrique de la multiplicité dérivée :

> Un produit de ρ éléments du premier ordre représente un élément de la multiplicité dérivé du $\rho^{ème}$ ordre […] à une intensité donnée ; deux produits congruents, mais non équivalents, représentent le même élément mais à des intensités différentes. Or un élément de la multiplicité du $\rho^{ème}$ ordre, représenté par un produit, peut […] être identifié à la sous-région de la multiplicité définie par ce produit. Ainsi, le produit doit être conçu comme représentant la sous-région à une intensité donnée.[27]

Prenons des exemples : le produit de deux élément-points e_ie_j d'une multiplicité tridimensionnelle représente, selon Whitehead, la droite passant pas e_i et e_j à une intensité donnée ; le produit de trois éléments $e_ie_je_k$ peut être identifié, si les trois éléments sont indépendants, au plan passant par e_i, e_j et e_k (à une intensité donnée). Point important : dans l'interprétation proposée, deux produits qui ne diffèrent l'un avec l'autre que par l'intensité représentent la même entité géométrique. Autrement dit, l'intensité a beaucoup moins d'importance dans le calcul de l'extension que dans le calcul positionnel.

Concernant l'interprétation géométrique, Whitehead [*Ibid.*, p. 177] effectue la remarque suivante :

> Ce symbolisme et son interprétation ne peuvent avoir une application que là où une sous-région est plus qu'un agrégat de ses éléments. Il est fondamentalement présupposé qu'une sous région peut être traitée comme un tout et qu'elle possède certaines propriétés qui sont symbolisées par les relations entre les éléments de la multiplicité dérivée de l'ordre approprié. […] Une multiplicité positionnelle dont les sous-régions possède cette propriété sera appelée une *multiplicité extensive*.[28]

Lorsqu'on interprète, dans un espace tridimensionnel, un produit de trois points comme un plan, on considère ce plan comme un élément d'une multiplicité tridimensionnelle[29] de troisième ordre. Le plan n'est pas ici un ensemble de points ; il est fondamentalement simple

[27] « A product of ρ elements of the first order represents an element of the derived manifold of the ρ^{th} order [...] at a given intensity ; two congruent but not equivalent products represent the same element but at different intensities. Now an element of the manifold of the ρ^{th} order, which is represented by a product may [...] be identified with the subregion of the manifold of the first order defined by the product. Thus the product is to be conceived as representing the subregion at the given intensity. »

[28] « This symbolism and its interpretation can have no application unless a subregion is more than a mere aggregate of its contained elements. It is essentially assumed that a subregion can be treated as a whole and that it possesses certain properties which are symbolized by the relations between the elements of the derived manifold of the appropriate order. [...] A positional manifold whose subregions possess this property will be called an *extensive manifold.* »

[29] Comme $\nu = 4$ et $\rho = 3$, le nombre de dimensions est bien trois.

et c'est au contraire le point qui est considéré comme un ensemble de plans[30]. Ces contraintes « ontologiques », qui pèsent sur les multiplicités positionnelles aptes à modéliser le calcul de l'extension, sont en partie assouplies ; Whitehead explique [*Ibid.*, p. 214] que l'on peut considérer les multiplicités dérivées d'une multiplicité de premier ordre, non pas comme des multiplicités à part entière, mais comme un moyen permettant de mettre à jour les propriétés de la multiplicité originelle.

Revenons à l'architecture du livre IV. Le second chapitre est consacré à la définition d'un nouveau produit, le produit régressif. Pourquoi définir une nouvelle opération ? Whitehead [1898, p. 181] explique :

> Selon les lois de la multiplication combinatoire que l'on vient d'exposer, le produit de deux grandeurs extensives S_ρ et S_σ, respectivement du $\rho^{\text{ème}}$ et du $\sigma^{\text{ème}}$ ordre, doit être nécessairement nul, si $\rho + \sigma$ est plus grand que ν, lorsque la multiplicité originale a ν-*1* dimensions. De tels produits ne peuvent donc jamais apparaître, puisque chaque terme d'une équation quelconque les contenant serait nécessairement nul.[31]

Parce que la multiplication combinatoire ne peut pas compter plus de facteurs qu'il y a de vecteurs dans la base de la *manifold* initiale, il faut, si l'on veut généraliser l'opération à un nombre indéterminé de termes, définir une nouvelle forme de produit.

La définition « officielle » de la nouvelle opération se fonde sur le concept de supplément d'une combinaison multiplicative E_ρ d'ordre ρ relativement à une base $e_1, \ldots, e_\nu$ d'une multiplicité de dimension ν-*1*. Le supplément de E_ρ, noté $|E_\rho$ est la combinaison d'ordre $\nu - \rho$ telle que le produit progressif $E_\rho|E_\rho = 1$ [*Ibid.* 1898, p. 182-183][32]. Prenons un exemple. Soit $E_3 = e_1e_2e_3$ une combinaison de trois éléments dans la multiplicité tridimensionnelle engendrée par e_1, e_2, e_3, e_4. Le supplément de E_3, relativement à la base donnée, est $|E_3 = e_4$. Tel qu'il est défini, le supplément d'une combinaison d'extraordinaires dépend à la fois de la nature des termes combinés et de la façon, toute arbitraire, dont les extraordinaires originaux de la multiplicité sont choisis.

Une fois muni de l'opération supplément, Whitehead pose que, lorsque $(\rho + \sigma)$ est supérieur à ν mais inférieur à 2ν[33], le produit de S_ρ et de S_σ est égal au supplément du produit progressif $|S_\rho|S_\sigma$ [*Ibid*, p. 183-184]. Le produit régressif $S_\rho S_\sigma$ détermine ainsi une région d'ordre $\rho + \sigma - \nu$. Cette définition présente l'avantage de montrer immédiatement que la nouvelle opération est distributive par rapport à l'addition[34], autrement dit qu'elle est un authentique produit. Whitehead ne distingue d'ailleurs pas ensuite dans sa notation les deux multiplications, et parle de façon générale de produit mixte, en laissant au lecteur le soin de repérer si la somme des ordres des termes multipliés est, ou non, supérieure à l'ordre de la multiplicité originale [*Ibid.*, p. 184-185]. L'inconvénient majeur de sa démarche est cependant que, en faisant référence au concept de supplément, la définition du produit régressif en tant qu'opération n'est pas « intrinsèque » (dépend de la base). Or, le résultat d'un produit, qu'il soit régressif ou progressif, ne dépend que de la multiplicité originale et des termes que l'on multiplie – absolument pas de la façon dont on choisit la base.

Le calcul de l'extension et la règle du facteur moyen

---

30 Un point peut être considéré comme un ensemble de plans dans la mesure où il est l'intersection de plusieurs plans ; sur ce thème et sur la question apparentée de la dualité, voir *infra*. section 3.

31 « According to the laws of combinatorial multiplication just explained the product of two extensive magnitudes S_ρ and S_σ respectively of the ρ^{th} and σ^{th} order must necessarily be null, if $\rho + \sigma$ be greater than ν, where the original manifold is of ν–1 dimensions. Such a products can therefore never occur, since every term of any equation involving them would necessarily be null ». Lorsque le produit contient des éléments dépendants, son résultat est nul.

32 Par convention, Whitehead pose (p. 182) que le produit des éléments de la base $(e_1 \ldots e_\nu)$ est égal à 1.

33 Lorsque la somme des ordres des facteurs est supérieure à 2ν, l'ordre du produit régressif est le reste de la division par ν de la somme des ordres des facteurs.

34 La distributivité du produit provient du fait que la supplémentation est distributive sur l'addition.

Afin de rendre manifeste la signification géométrique de la multiplication régressive, Whitehead est conduit, dans la seconde partie du chapitre 2 du livre IV à présenter le produit régressif d'une façon différente. Le théorème central est la proposition B du §102 [Whitehead 1898, p. 186] :

> Si A_ρ, A_σ, et A_τ sont des […] grandeurs extensives quelconques, respectivement du $\rho^{\text{ème}}$, $\sigma^{\text{ème}}$ et $\tau^{\text{ème}}$ ordre, telle que $\rho + \sigma + \tau = \nu$, alors :
>
> $$A_\rho A_\sigma . A_\rho A_\tau = (A_\rho A_\sigma A_\tau) A_\rho$$ [35]

A_ρ est ici le facteur commun des deux produits progressifs $A_\rho A_\sigma$ et $A_\rho A_\tau$. Le théorème nous apprend que le produit régressif de ces deux combinaisons est égal au facteur commun A_ρ, que multiplie un scalaire (en effet, $A_\rho A_\sigma A_\tau$, d'ordre ν, est un nombre). Prenons un exemple d'application de cette règle, dite du facteur moyen (« *rule of the middle factor* ») [*Ibid.*, p. 188] :

> Supposons que la multiplicité complète ait trois dimensions, de façon à ce que $\nu = 4$, et soient $A_\rho = pqr$, et $A_\sigma = st$ – où p, q, r, s, t sont des éléments de la multiplicité complète. Alors pour trouver le produit $pqr . st$, la règle nous conduit à chercher l'élément x que la droite st doit avoir en commun avec le plan pqr, et à écrire soit pqr sous la forme uvx, soit st sous la forme xz ; et ainsi
>
> $$pqr . st = uvx . st = (uvst)x, \text{ et } pqr . st = pqr . xz = (pqrz)x$$ [36]

Le produit régressif d'un plan (d'ordre 3) et d'une droite (d'ordre 2) non inscrite en lui[37] est, dans un espace tridimensionnel, le point d'intersection (le facteur commun) des deux sous-régions à une intensité donnée. L'intérêt de la règle est de montrer que le produit régressif est, contrairement aux apparences, indépendant du choix d'une base, et donc qu'une interprétation géométrique de la multiplication régressive est possible. Whitehead [1898, p. 190] insiste sur ce point :

> La règle du facteur moyen […] manifeste le fait que le produit de deux grandeurs A et B est indépendant des éléments de référence choisis dans la multiplicité originale pour définir l'opération de supplémentation.[38]

Le philosophe dit avoir envisagé de définir la multiplication régressive directement par la règle du facteur moyen. Il rejette cependant cette option : la définition « directe », géométriquement plus satisfaisante, aurait eu l'inconvénient de ne pas manifester le caractère distributif de l'opération.

Whitehead [*Ibid.*, p. 191] récapitule les diverses interprétations associées aux opérations produit de deux régions P_ρ et P_σ, respectivement du $\rho^{\text{ème}}$ et du $\sigma^{\text{ème}}$ ordre, sur une multiplicité d'ordre ν :

> Si $\rho + \sigma < \nu$, alors $P_\rho P_\sigma$ est progressif et représente la région contenant […] les deux régions P_ρ et P_σ, à moins que P_ρ et P_σ aient une partie commune, et dans ce cas le produit progressif $P_\rho P_\sigma$ est nul.
>
> Si $\rho + \sigma > \nu$, alors $P_\rho P_\sigma$ est régressif et représente la région complète commune à la fois à P_ρ et à P_σ, à moins que P_ρ et P_σ aient une région commune d'ordre supérieur à $\rho + \sigma - \nu$, et dans ce cas $P_\rho P_\sigma$ est nul.
>
> Si $\rho + \sigma = \nu$, alors $(P_\rho P_\sigma)$ est un simple nombre et le produit peut être considéré soit comme progressif soit comme régressif.[39]

---

[35] « If A_ρ, A_σ, and A_τ be any [...] extensive magnitudes of the ρ^{th}, σ^{th} and τ^{th}, and orders respectively, such that $\rho + \sigma + \tau = \nu$, then : $A_\rho A_\sigma . A_\rho A_\tau = (A_\rho A_\sigma A_\tau) A_\rho$. »

[36] « Suppose that the complete manifold be of three dimensions, so that $\nu = 4$, and let $A_\rho = pqr$, and $A_\sigma = st$; where p, q, r, s, t are elements of the complete manifold. The to find the product $psr . st$, the rule directs us to find the element which the line st must have in common with the plane pqr and to write either pqr in the form uvx or st in the form xz ; and then : $pqr . st = uvx . st = (uvst)x$, et $pqr . st = pqr . xz = (pqrz)$ ». La proposition E du § 102 (p. 188) précise que comme, si $p + q = \nu + r$ les régions A_p et A_q ont une région C_r en commun d'au moins r-1 dimensions, on peut écrire $A_p A_q = (B_{p-r} A_q) C_r$, avec B_{p-r} tel que $A_p = B_{p-r} C_r$.

[37] Si les deux sous-régions du $\rho^{\text{ème}}$ et du $\sigma^{\text{ème}}$ ordre correspondant aux deux facteurs du produit ont une partie commune d'ordre supérieure à $\rho + \sigma - \nu$, le produit régressif est égal à zéro (Cf. plus bas) ; il en est ainsi par exemple du produit d'un plan et d'une droite contenue dans ce plan.

[38] « The rule of the middle factor […] discloses the fact the regressive product of two magnitudes A and B is independent of the special reference elements in the original manifold which were chosen for defining the operation of taking the supplement. »

Le produit progressif est ici explicitement présenté comme la traduction formelle de l'opération géométrique fondamentale de projection ; le produit régressif comme l'expression algébrique de l'opération de section[40]. Le calcul de l'extension constitue donc, chez Whitehead, un calcul général des relations d'incidence dans une multiplicité. Le mathématicien explique ainsi que [*Ibid*., p. 224] :

> La projection de x sur le plan B relativement au sommet e est $x' = xe \,.\, B$ [41]

Le produit progressif xe correspond à l'opération de projection de x à partir de e ; le produit régressif[42] $xe \,.\, B$ représente l'intersection du plan B et de la droite « projetante » xe. Et si on définit, à la manière de Poncelet, une projection comme une composition de perspectives, on peut poser que deux points x et x' sont projectivement reliés dans l'espace à trois dimensions si et seulement si il existe n points e_i et n plans B_i, tels que : $x' = xe_1 \,.\, B_1 \,.\, e_2 \,.\, B_2 \,.\, \ldots\, e_n \,.\, B_n$[43]. Un des belles définitions rendues possible par l'adoption de ce formalisme est la définition d'une conique (dans une multiplicité bidimensionnelle) comme lieu des points x tels que, B et D étant des droites données, a, c et e étant des points donnés : $xaBcDex = 0$[44]. Le lien entre le produit mixte et les opérations projectives fondamentales de section et de projection est si naturel et organique qu'un géomètre comme L. Cremona, alors qu'il ne fait pas référence à l'œuvre de Grassmann, adopte dans son traité [Cremona 1885] une notation très proche de celle, toute algébrique, présentée par Whitehead[45].

Malgré sa grande portée, Whitehead souligne cependant les limites de la « règle du facteur moyen ». En effet, explique-t-il, si la règle nous conduit à chercher l'élément x commun à deux sous-régions, par exemple au plan pqr et la droite st, « il ne nous a, jusqu'à présent, été donné aucune règle permettant d'exprimer x en fonction de p, q, r, s, t » [Whitehead 1898, p. 188]. La règle manifeste le caractère « intrinsèque » et géométrique du produit régressif ; mais elle n'est pas opératoire : elle ne permet pas de déterminer dans le cas général le résultat d'un produit régressif en fonction de ses facteurs.

Ces considérations amènent Whitehead à étendre la règle du facteur moyen. Au lieu de formuler abstraitement l'« *extended rule of the middle factor* », nous allons prendre l'exemple que Whitehead donne au paragraphe 103 [*Ibid*., p. 189-190] :

> Soit $\nu = 4$, la multiplicité complète ayant trois dimensions :
>
> Alors $pqr \,.\, st = st \,.\, pqr = (pqrt)s - (pqrs)t$
>
> $= (pqst)r + (rpst)q + (qrst)p.$[46]

Le terme x commun à pqr et à st est, dans la première équation, repérée à partir de s et de t. Le rapport entre les nombres $(pqrt)$ et $(pqrs)$ permet de repérer sur la droite st la position du point x qui croise le plan pqr. Dans la seconde équation, la position de x est donnée par le rapport

---

[39] « If $\rho + \sigma < \nu$, then $P_\rho P_\sigma$ is progressive and represents the containing region [...] of the two regions P_ρ and P_σ; unless P_ρ and P_σ overlap, and in this case the progressive product $P_\rho P_\sigma$ is zero. If $\rho + \sigma > \nu$, then $P_\rho P_\sigma$ is regressive and represents the complete region common both to P_ρ and P_σ; unless P_ρ and P_σ overlap in a region of order greater than $\rho + \sigma - \nu$, and in this case $P_\rho P_\sigma$ is zero. If $\rho + \sigma = \nu$, then $(P_\rho P_\sigma)$ is a mere number and can be considered either as progressive or regressive. »

[40] Peano [1888] et Burali-Forti [1897] mettent également l'accent sur l'importance de cette interprétation géométrique des produits grassmaniens.

[41] Citons l'ensemble du passage : « Let the complete region be of ν–1 dimensions, and let x, y, etc., be elements on any given plane A of this region. Let e be any given point not on this plane and let B be any other given plane. Then the lines ex, ey, etc., intersect the plan B in elements x', y', etc. : the assemblage of elements x', y', etc., on the plane B is called the projection on B from the vertex e of the assemblage of elements x, y, etc., on the plane A. [...] These constructions can be symbolized by products : thus the projection of x on to the plane B from the vertex e is $x' = xe \,.\, B$. »

[42] Le produit est nécessairement régressif, car Whitehead définit un plan comme une sous-région de ν-2 dimensions dans une multiplicité de ν-1 dimensions.

[43] [Whitehead 1898, p. 224 sq.]

[44] [*Ibid*., p. 229-231]. L'équation provient directement du théorème de Pascal sur les hexagones inscrits.

[45] Voir *infra*. section 3, pour plus de précision.

[46] « Let $\nu = 4$, the complete manifold being therefore of three dimensions. Then :

$$pqr \,.\, st = st \,.\, pqr = (pqrt)s - (pqrs)t = (pqst)r + (rpst)q + (qrst)p. \text{ »}$$

des trois nombres (*pqst*), (*rpst*) et (*qrst*) en fonction des points *r*, *q* et *p* du plan *pqr*[47]. La règle étendue du facteur moyen, que nous ne formulerons pas ici dans toute sa généralité, permet, en combinant le calcul de l'extension et les règles concernant les intensités issues de l'algèbre positionnelle, de calculer le résultat d'un produit régressif à partir des seules données du problème. Dans la suite du livre IV, Whitehead met systématiquement en œuvre cette règle pour démontrer les principaux théorèmes de géométrie projective. Ainsi en va-t-il, par exemple, au début du chapitre 4, de la démonstration du théorème d'unicité de la construction du quadrilatère [*Ibid.*, p. 215-223][48].
Si les détails de la démarche de Whitehead ne nous intéressent pas, il importe cependant de retenir que la plupart des preuves dans la quatrième partie *Universal Algebra* ne procède pas du seul calcul de l'extension, mais de la combinaison de cette algèbre et du calcul additif exposé dans le livre III : les intensités, et le choix des extraordinaires originaux, jouent dans les développements géométriques du livre IV un rôle fondamental.

Nous en savons suffisamment sur l'*Universal Algebra* pour répondre à la question initiale : quelle conception de la géométrie projective développe Whitehead ?
Le philosophe fait intervenir, à des moments clés de son livre III, des quantités numériques. Les intensités jouent un rôle dans la définition du rapport anharmonique ; elles sont également utilisées dans la preuve du théorème d'unicité de la construction du quadrilatère. Quel statut ont ces nombres ? L'approche de Klein présuppose que le développement de la géométrie projective soit indépendant de toute référence à une *Massbestimmung*. Si la nature du projet whiteheadien interdit d'attribuer aux intensités une signification métrique, quel contenu leur donner ?
Dans le livre IV, Whitehead développe un calcul dans lequel la référence aux intensités est mise entre parenthèse. Le calcul de l'extension est une puissante formalisation algébrique des relations d'incidence entre formes géométriques. Reprenant certaines constructions grassmaniennes, Whitehead montre la fécondité de cette algèbre en donnant par exemple l'équation d'une conique. Mais le mathématicien anglais ne poursuit pas cette piste très loin, préférant comme Grassmann avant lui, combiner les calculs positionnels et extensionnels dans la règle étendue du facteur moyen, et développer à partir d'elle l'édifice projectif.
Le problème de la nature des intensités se pose donc aussi bien au livre IV qu'au livre III. Or Whitehead ne répond tout simplement pas à la question de leur statut, et son silence jette une ombre sur la portée épistémologique et philosophique de son entreprise.

3- La réaction de Russell (1) : *Sur les axiomes de la géométrie*

A la recherche de la méthode vraiment projective

Dans une lettre datée du 21 juin 1900 à son ami L. Couturat, Russell revient sur le très favorable compte-rendu que le philosophe français a consacré à l'*Universal Algebra.* Ce que Russell dit à cette occasion mérite d'être cité *in extenso* :

> Votre revue de Whitehead m'a beaucoup plue, comme à Whitehead lui-même. Cependant j'aimerais signaler ce que je crois être une erreur. L'algèbre de Grassmann (même avant la multiplication) n'est pas celle de la géométrie projective toute pure : l'intensité y est essentielle, mais si elle ne représente pas une masse, elle ne saurait représenter qu'une idée métrique. C'est pour cette raison que Whitehead, qui est d'accord avec moi en ceci, parle de géométrie descriptive, non projective. Vous verrez qu'il prouve la construction de v. Staudt sans la troisième dimension (p. 215), ce qu'il ne saurait faire par une méthode vraiement projective. Le vrai algèbre de la géométrie projective est celui que j'ai inventé pour

[47] La formule du produit vectoriel triple dans l'espace tridimensionnel [**a** x (**b** x **c**) = **b**(**a** . **c**) – **c**(**a** . **b**)] est un cas particulier de la règle étendue du facteur moyen.
[48] Sur ce théorème, et l'usage qu'en fait Russell, voir plus loin.

> ma réponse à Poincaré, qui ne contient que la multiplication. J'ai persuadé Whitehead de ce fait, et il va mettre cet algèbre dans son second volume. [Russell-Couturat 1897-1913, p. 182] [49]

Le propos est on ne peut plus clair : « l'algèbre de Grassmann […] n'est pas celle de la géométrie projective toute pure », ceci parce que l'intensité y joue un rôle essentiel et que l'intensité est un concept métrique. Russell pose donc à Whitehead la question ouverte par Klein : comment définir la géométrie projective de façon à permettre la preuve du théorème fondamental, sans pour autant présupposer de métrique ? Russell remarque notamment que la thèse de Whitehead est trop forte : en s'appuyant sur la définition du birapport en termes d'intensité, l'auteur du *Traité* « prouve la construction de v. Staudt sans la troisième dimension » ; or, comme Klein [1873] le souligne déjà, le théorème de Desargues sur lequel repose l'unicité de la construction du quadrilatère ne peut pas être démontré dans le plan. Preuve est donc faite que l'intensité introduit un type de considération étranger à la méthode projective.

A cette remarque négative, Russell en ajoute une autre, programmatique. Si l'algèbre purement projective n'est pas le calcul positionnel (développé dans le livre III de *Universal Algebra*), elle est celle du calcul extensionnel (exposé dans le livre IV). Comme nous l'avons vu, au début du livre IV, les intensités n'ont pas une fonction décisive, la règle du facteur moyen permettant d'interpréter le produit mixte comme une formalisation des relations d'incidence au sein des multiplicités. Dire que la vraie « algèbre de la géométrie projective […] ne contient que la multiplication » pose cependant un problème : chez Whitehead, l'opération « produit » se définit par la propriété de distributivité sur l'addition et présuppose les multiplicités positionnelles. La remarque de Russell appelle donc à une reformulation complète de la présentation adoptée au livre IV du traité de Whitehead [1898]. C'est ce à quoi le philosophe s'emploie dans la version anglaise de son article publié dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* en réponse aux critiques que Poincaré avait adressées à son *Essay on the Foundations of Geometry* (1897).

La reformulation du calcul de l'extension dans le « système » russellien

La seconde partie de l'article de Russell [1899d], condense et résume tout un ensemble de recherches dont les notes précédentes ([1898c], [1898d], et surtout [1899a]) conservent la trace. Piqué au vif par les critiques de Poincaré[50], Russell tente d'élaborer une axiomatique rigoureuse censée contenir la totalité de la géométrie projective.

Dans la version anglaise de *Sur les axiomes de géométrie*, le système axiomatique fait l'objet d'une double présentation : « formelle » d'abord, « algébrique » ensuite Russell [1899d, p. 403-405]. Dans la version « formelle », Russell se donne trois classes d'objets (désignés par des lettres latines majuscules, latines minuscules, grecs minuscules) et une relation de « détermination unique » entre eux – relation dont le contenu est fixé par les six axiomes. Ainsi, selon le premier postulat, deux objets de la première classe déterminent uniquement un objet de la seconde classe. Bien entendu, l'interprétation de ces types d'objet est géométrique [*Ibid.*, p. 404] :

> Pour déduire de ces axiomes la géométrie projective, il suffit de lire *point* (ou *plan*) au lieu de *A*, *droite* au lieu de *a*, et *plan* (ou *point*) au lieu de α.[51]

Rien, cependant, n'oblige à attribuer à ces signes leur interprétation attendue. C'est en cela que le système présenté est « formellement énoncé ».

La seconde présentation, « algébrique », suit immédiatement la première [*Ibid.*, p. 404] :

[49] Les fautes de français de Russell n'ont pas été corrigées.
[50] Pour une analyse de la polémique entre Poincaré et Russell, voir [Nabonnand 2000].
[51] [Russell 1899c, p. 444].

> Les axiomes peuvent être représentés dans une forme qui convient à une Algèbre, en considérant les objets déterminés par deux ou trois objets comme leur produit.[52]

Ainsi, au lieu d'avoir affaire à trois classes d'objets et une relation de détermination, on a affaire à une seule classe d'objets et une opération de multiplication. Les six axiomes de la première présentation constituent alors l'ensemble des règles gouvernant le produit. Puisque le domaine est constitué d'une seule classe d'objets, il n'est plus nécessaire d'employer différents types de symboles ; des indices numériques, combinés de diverses manières, se substituent à l'usage des lettres. Par exemple, l'affirmation, contenue dans le premier axiome, selon laquelle deux objets A_1 et A_2 déterminent univoquement une entité a quel que soit l'ordre dans lequel on les considère devient, reformulée algébriquement : $12 = 21$.

La double présentation, algébrique et formelle-géométrique, inscrit directement le projet de Russell dans le cadre mis en place dans le livre IV de *Universal Algebra*. On vient de le voir, Whitehead y établit qu'un produit quelconque de ρ éléments (d'ordre un) représente une sous-région de dimension ρ-1 à l'intérieur d'une multiplicité de dimension ν-1 (avec, bien entendu $\nu > \rho$). Russell ne fait que reprendre ce schéma, en assignant à ν la valeur 4. Le produit de deux points représente la droite qui les contient ; celui de trois, le plan qu'ils déterminent. La seule différence, et elle est de taille, est que les objets correspondant aux produits de différents ordres (les droites, les plans) sont des indéfinissables simples, et ne sont pas présentés chez Russell comme des sous-régions d'une multiplicité positionnelle. Russell, respectant le diagnostic posé dans la lettre à Couturat, évite soigneusement de faire référence, dans l'algèbre de la géométrie projective, à une opération d'addition.

L'analyse du contenu des axiomes confirme la teneur whiteheadienne de la réflexion russellienne. Le jeune philosophe reprend en effet dans ses deux premiers axiomes les règles du produit progressif et régressif grassmanien[53].

Le premier postulat formule, dans un langage qui n'est ni celui de Whitehead ni celui de Grassmann, les règles gouvernant le produit progressif dans le cadre limité d'une « multiplicité » d'ordre quatre [*Ibid*., p. 403-404] :

> *Axiome 1* : il y a une classe A d'objets (A_1, A_2, A_3, …) tels que deux quelconques d'entre eux, A_1, A_2, par exemple, déterminent d'une manière unique un autre objet a_{12} appartenant à une classe différente a. Mais un objet a ne détermine pas, inversement, d'une manière unique les objets A qui le déterminent. Si l'objet a_{12} déterminé par A_1 et A_2 n'est pas identique a l'objet a_{13} déterminé par A_1 et A_3, alors les trois objets A_1, A_2, A_3 déterminent d'une manière unique un objet α_{123}, appartenant à une nouvelle classe α, et qui ne détermine pas non plus d'une manière unique les objets qui le déterminent. En outre, a_{12} et α_{123} sont indépendants de l'ordre des objets qui le déterminent ; α_{123} est encore déterminé par A_1 et α_{23} ou par A_2 et α_{31} ou par A_3 et α_{12}.[54]

Les produits envisagés sont tous progressifs, au sens où la somme des ordres des facteurs est inférieur à 4 ; et ils s'interprètent naturellement comme des multiplicités qui contiennent les facteurs du produit. Ainsi, A_1A_2 représente la droite contenant les points A_1 et A_2 ; $A_1A_2A_3$ représente le plan passant par les trois points A_1, A_2 et A_3, ou par la droite A_1A_2 et le point A_3. Comme le produit progressif grassmanien, la multiplication définie par Russell est la version algébrique de l'opération géométrique de projection d'une sous-région sur une autre.

Le second axiome énonce, toujours dans un langage qui n'est pas celui du calcul de l'extension, les règles gouvernant le produit régressif [*Ibid*., p. 404] :

> *Axiome II* : Deux objets de classe α, soit α_1 et α_2, déterminent d'une manière unique un objet ${}_{12}a$ de la classe a ; et si ${}_{12}a$ n'est pas identique à ${}_{13}a$, alors α_1, α_2 et α_3 déterminent d'une manière unique un objet ${}_{123}A$ de la classe A, qui est aussi déterminé par α_1 et ${}_{23}a$. Deux objets de la classe a, ou quatre objets de

[52] « The axioms may be represented in a form suitable for an Algebra, by regarding the object determined by two or three objects as their product. »

[53] Russell consacre une analyse détaillée des pages du livre de Whitehead [1898] portant sur la multiplication régressive et la règle du facteur médian. Il s'agit du manuscrit RA 230.030970 qui n'a pas été publié dans [Papers 2]. Nous remercions N. Griffin et les Archives Russell de nous avoir communiqué le texte.

[54] [Russell 1899c, p. 443].

la classe A ou de la classe α, ne déterminent rien. Ainsi tous les objets déterminés par des objets des classes A, a et α, appartiennent à leur tour à ces trois classes[55].

Le point commun de tous ces produits est que le nombre de leur terme est supérieur à l'ordre de la multiplicité originale (supérieur à *4*). L'axiome vise à établir que le résultat de ce genre de multiplication représente (sauf cas particulier) la sous-région commune aux termes du produit – l'ordre de cette sous-région étant, comme dans *Universal Algebra*, égal au reste de la division de la somme des ordres des facteurs par l'ordre de la multiplicité originale [*Ibid*., p. 405]. La coïncidence entre l'opération ici définie et le produit régressif grassmanien est parfaite. Mais, à la différence de Whitehead, Russell définit sa multiplication « régressive » géométriquement, directement à partir de la « règle du facteur moyen », sans faire appel au supplément. La multiplication d'éléments dont la somme des ordres dépasse *4* constitue immédiatement une version calculatoire de l'opération géométrique de section d'une sous-région par une autre.

Dans les deux premiers axiomes de son système, Russell reprend donc les règles gouvernant la multiplication dans le calcul de l'extension. La multiplication n'est, pour lui, qu'une reformulation algébrique des deux opérations fondamentales que sont la projection et la section.

N. Griffin souligne [1991, p. 137] avec pertinence la très grande parenté entre les notations adoptées par Russell et celles présentées par L. Cremona dans son classique manuel de géométrie projective[56]. Malgré les réelles ressemblances, il est difficile, nous semble-t-il, de faire du géomètre italien la source de la réflexion russellienne. D'une part parce que les travaux de Cremona étaient connus de Russell dès 1897 ; d'autre part et surtout, parce que l'on ne trouve pas, chez le mathématicien italien, l'idée que les combinaisons de lettres représentent un produit dont on peut faire une théorie algébrique. Le contenu des deux premiers axiomes, la double présentation adoptée par Russell, plus la lettre à Couturat ne laissent guère place au doute : c'est le livre IV de *Treatrise on Universal Algebra* qui fournit à Russell la matrice de ses développements. Comme il l'explique à Couturat, Russell cherche à fonder la géométrie projective sur le calcul de l'extension whiteheadien. Cette reprise n'est cependant pas un plagiat : Russell veut isoler l'algèbre multiplicative et la rendre indépendante du calcul additif, ce qui l'oblige, comme nous avons commencé à le voir, à modifier considérablement l'architecture des structures mises au point par Whitehead. L'examen des quatre derniers axiomes du système permet de mesurer à quel point la stratégie russellienne diffère de celle de son ancien professeur.

La stratégie russellienne et la preuve d'unicité de la construction du quadrilatère

Dans son second axiome, Russell, nous l'avons souligné, reprend la définition du produit régressif par la règle du facteur moyen. Or, nous avions noté, que malgré son importance conceptuelle, la règle du facteur moyen n'avait chez Whitehead aucune efficacité algorithmique. Pour déterminer quelle était la sous-région commune à ρ facteurs, il fallait, si ladite sous-région n'était pas donnée dans le problème, poser son existence sous la forme d'une variable. Il en va de même dans [Russell 1899d]. Le second axiome stipule bien que le produit de deux plans α_1 et α_2 est une droite ; il fournit même un symbolisme pour nommer

[55] [Russell 1899c, p. 444].

[56] [Cremona 1885] ; voir notamment p. 1 : « Pour l'uniformité des notations, je désignerai toujours les points par les lettres capitales A, B, C, …, les droites par les minuscules a, b, c, …, les plans par les lettres grecques α, β, δ.... De plus, AB désignera cette partie de la droite joignant A et B qui est comprise entre les points A et B ; Aa désignera le plan qui passe par le point A et la droite a ; $a\alpha$ le point commun à la droite a et au plan α ; $\alpha\beta$ la droite formée par l'intersection des plans α et β ; ABC le plan des trois points A, B, C ; $\alpha\beta\delta$ le point commun aux trois plans α, β, δ ; αBC le point commun au plan α et à la droite BC ; $A.\beta\delta$ le plan passant par le point A et la droite $\beta\delta$; αBc la droite commune au plan α et au plan Bc ; $A.\beta c$ la droite joignant le point A au point βc, etc. »

cette droite : ${}_{12}a$; mais il ne donne aucun moyen permettant de définir la position du résultat en fonction des facteurs. Il est ainsi symptomatique que Russell s'exprime en anglais ordinaire lorsqu'il formule la version algébrique de son second postulat[57]. Si cet axiome identifie le résultat du produit de deux plans à une droite[58], il ne permet aucun calcul et ne fournit aucun algorithme. Russell ne sait en réalité tout simplement pas comment déterminer l'identité de la droite autrement que par le produit des plans en question.
Une telle carence algorithmique est catastrophique. A quoi bon, en effet, construire un calcul qui ne calcule rien ? Russell soutient que le système qu'il expose permet de prouver la totalité des théorèmes de la géométrie projective. Dans son esprit, cela signifie que l'unicité de la construction du quadrilatère doit au moins être dérivable des postulats présentés[59]. Mais élaborer une telle preuve n'est pas une mince affaire. Traduit dans le nouveau langage, cela revient à prouver que le produit « *45{23.4(12.345)(13.245)}* est constant aussi longtemps que *145*, *245*, *345* sont constants, quelles que soient les variations des termes *1*, *2*, *3*, *4*, *5* » [1899d, p. 407] (la figure 1 permet de reconnaître, sous les atours algébriques, la forme célèbre de la construction de Staudt). Dans sa démonstration [*Ibid.*, p. 408], Russell fait varier les termes *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, et calcule que, si *145*, *245*, *345* sont constants, alors le produit reste constant. Un tel résultat exige cependant des instruments autrement plus puissants que ceux fournis par les deux premiers axiomes.

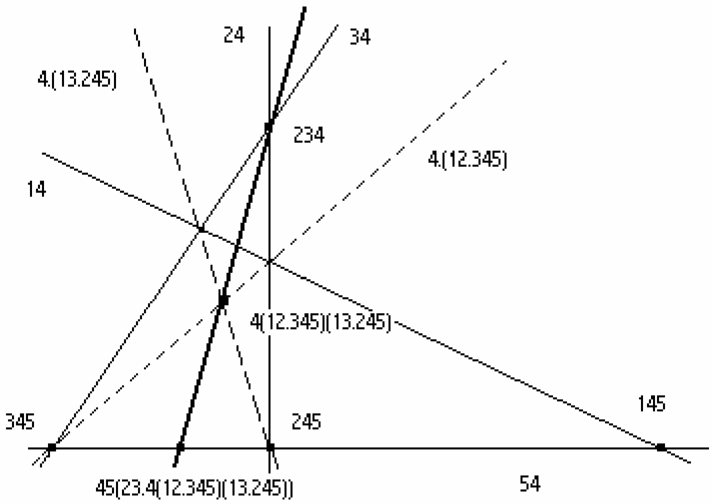

Figure 1 : les nombres désignent des plans. Le plan 4 correspond au plan de la feuille. Les droites 14, 24, 34, 54 représentent ainsi les traces des différents plans sur le plan 4. On pourrait interpréter les nombres comme des points ; mais dans ce cas, les éléments invariants seraient des plans appartenant à une gerbe.

Pour remédier à la déficience algorithmique de la règle du facteur moyen (notamment pour prouver le théorème d'unicité de Staudt), Whitehead introduisait une nouvelle règle, « étendue », qui combinait des considérations positionnelles et extensionnelles. Cette voie est

57 [Russell 1899d, p. 404-405] : « *Axiome 2* : Un produit peut contenir un nombre quelconque de termes, mais doit toujours se diviser en deux ou trois groupes. Si les groupes contiennent cinq termes ou plus, ils doivent être une nouvelle fois divisé en groupes. Aucun produit et aucun groupe ne doit contenir un nombre de termes égal à *4* ou à un multiple de *4*. L'ordre d'un groupe donne la classe à laquelle l'objet représenté appartient, et il est défini comme le reste de la division par *4* du nombre total de ses termes (les termes répétés sont comptés aussi souvent qu'ils apparaissent). Les groupes principaux dans n'importe quel produit peuvent être permutés en tant que tout, mais ne doivent en général pas être scindés. »

58 L'ordre d'un plan est *3* ; et le groupe constitué par le produit de deux plans, lorsqu'il est divisé par *4*, a pour reste *2*, ce qui correspond à l'ordre d'une droite.

59 [Russell 1899d, p. 405] : « Pour montrer que ces axiomes sont suffisants, il n'y a qu'à prouver (en partant de ces axiomes) que la construction du quadrilatère de v. Staudt est unique, puisque de cette construction dérive toute la géométrie projective, y compris la définition du rapport anharmonique. »

interdite à Russell ; cherchant à rendre autonome le calcul de l'extension, il ne peut faire appel à une algèbre additive. Comment alors développer en un calcul ce qui reste pour l'instant d'ordre non algorithmique ? Au lieu de présenter une méthode générale permettant de calculer le produit régressif de n'importe quelle combinaison d'éléments, Russell fixe, dans les derniers axiomes de son système, le résultat de certains produits particuliers [*Ibid.*, p. 405]. Ainsi, l'axiome III stipule que $123\ .\ 124 = 12$ (que le produit de deux plans qui ont en commun deux points A_1 et A_2 est la droite A_1A_2) ; l'axiome IV que[60] $123\ .\ 145\ .\ 167 = 1$ (que le produit de trois plans qui contiennent tous le même point A_1 est égal à ce point). Les deux derniers axiomes, même s'ils sont légèrement plus compliqués, ne font pas exception. L'axiome V nous apprend que le résultat du produit de deux plans $A_1A_2A_3$ et $A_1A_4A_5$, qui contiennent un même point A_1, est la droite passant par ce point et par l'intersection de la droite A_2A_3 et du plan $A_1A_4A_5$. Le dernier postulat donne le résultat du produit de deux points, déterminés chacun comme l'intersection d'une même droite avec deux plans différents[61]. La stratégie adoptée par Russell est donc complètement différente de celle adoptée par Whitehead : aucune méthode générale n'est exposée ; seuls certaines combinaisons de termes, très particulières, sont considérées. Mais pourquoi s'intéresser seulement à ces produits ? Et en quoi ces résultats particuliers permettent-ils de rendre opératoire le système russellien ?

L'examen du manuscrit intitulé *Notes on Geometry* [Russell 1899a] montre que les quatre derniers axiomes proviennent de l'analyse des procédures mises en œuvre dans les preuves classiques du théorème de Desargues, d'où découle la démonstration de l'unicité de la construction du quadrilatère. Le jeune philosophe concentre sa réflexion sur ce que l'on appelle de nos jours la configuration de Desargues[62], c'est-à-dire la figure composée de 10 droites se coupant toutes en trois points, ou comme Russell préfère la décrire : la figure composée de l'intersection de cinq plans quelconques dans l'espace projectif. Les 14 premières pages de l'article de Russell [1899a, p. 362-371] sont entièrement consacrées à un examen fouillé des relations entre les dix droites et les dix points déterminés par les intersections des cinq plans donnés. Russell propose ensuite [*Ibid.*, p. 373-375], sur trois pages, une recension exhaustive des différents axiomes nécessaires à la construction de la configuration et à la preuve du théorème de Desargues[63] ; on retrouve là le contenu des quatre derniers postulats.

Les combinaisons particulières envisagées dans *Sur les axiomes de Géométrie* sont donc très soigneusement choisies ; elles constituent la traduction algébrique des réquisits géométriques nécessaires à la preuve du théorème de Desargues. Russell ne cherche pas, comme le fait Whitehead, à retrouver des théorèmes projectifs en utilisant de nouvelles et puissantes méthodes, purement algébriques. Il conçoit au contraire son calcul comme une moyen de donner une forme à ce qu'il y a de proprement géométrique dans les preuves canoniques. Russell part des démonstrations projectives classiques, et tentent de leur donner une formulation calculatoire ; Whitehead part des structures algébriques, et dérivent les résultats géométriques. La perspective de Russell, aux antipodes de celle de son ancien professeur, est bien celle décrite dans la lettre à Couturat du 21 juin 1900 : il s'agit d'inventer une algèbre de la géométrie projective, non pas pour mettre à disposition des mathématiciens un nouvel outil, mais pour manifester dans toute sa pureté la singularité des méthodes héritées de Staudt.

[60] Si $123\ .\ 145$ diffère de $123\ .\ 167$, c'est-à-dire si, exprimé géométriquement, les trois plans n'appartiennent pas à la même gerbe.

[61] $(12\ .\ 345)(12\ .\ 678) = 12$.

[62] En ce qu'elle attache une importance fondamentale à la configuration de Desargues, la démarche de Russell, anticipe celle que Veblen et Young adopteront dans leur classique *Projective Geometry* (1910). Les deux géomètres américains centrent en effet leur développement sur le concept de configuration [Veblen-Young 1910, p. 38]. La figure étudiée par Russell correspond au « complete space five-plane (five-point) » [*Ibid.*, p. 39-41].

[63] Pour une mise au point sur le manuscrit, voir le commentaire des éditeurs N. Griffin et A. C. Lewis de [Papers 2, p. 360].

La remarque, faite en passant dans cette même lettre, selon laquelle Whitehead prouve l'unicité de la construction du quadrilatère sans la troisième dimension manifeste particulièrement bien la nature du projet russellien. Elle montre en effet que le philosophe cherche à capturer sous forme algébrique, non seulement le contenu de la géométrie projective, mais aussi et surtout ses limites. Le but de Russell n'est pas celui du mathématicien au travail, cherchant à mettre au jour de nouveaux objets ; il est celui, profondément conservateur, du philosophe fondationaliste, qui vise à systématiser une discipline pour la singulariser et la distinguer des autres. De ce point de vue, le système élaboré par Russell [1899d] est une réussite. La tridimensionalité, inscrite dans la configuration de Desargues, apparaît comme une condition *sine qua non* au développement de la géométrie projective et de son algèbre. C'est la double définition de la ligne droite à partir de deux points ou de deux plans, et non l'énoncé d'une règle générale (type « *extended rule of middle factor* »), qui rend opératoire le système russellien[64]. La tridimensionalité est, pourrait-on dire, le « moteur algorithmique » de l'algèbre projective mise au point par Russell.

Le « système » axiomatique russellien dans son contexte historique

Du point de vue de l'histoire des mathématiques, l'entreprise de Russell n'est pas sans intérêt. La mise en forme du raisonnement projectif met en effet au premier plan les opérations de section et de projection, c'est-à-dire tout ce qui relève en géométrie des relations d'incidence. Affirmer que la vraie algèbre « de la géométrie projective […] ne contient que la multiplication », c'est en effet soutenir que l'ensemble de la nouvelle géométrie repose sur les seuls rapports de projection et de section – en excluant notamment les relations d'ordre et les concepts métriques. Est-ce bien nouveau ? Certes, en fondant la définition du rapport harmonique sur la construction du quadrilatère, Staudt soulignait déjà, à sa manière, l'importance de la façon dont les droites et les plans se croisent dans l'espace. Mais les pré-requis nécessaires à la preuve de l'unicité de la construction du quadrilatère n'étaient pas chez lui unifiés et bien identifiés. En élaborant une algèbre fondée sur la seule opération « produit », la présentation de Russell homogénéise les concepts sous-jacents à la démarche de Staudt et détermine de façon plus précise le contenu de la méthode purement projective. Certes également, l'axiomatique de Russell [1899d] est très en retard par rapport aux formulations que les italiens, notamment Pieri, présentent à la même époque[65]. Mais même si l'on trouve mieux ailleurs au même moment, il n'en demeure pas moins que l'entreprise russellienne, loin d'être coupée du mouvement réel des mathématiques, s'inscrit dans une tradition bien vivante à l'époque. En isolant les relations d'incidence et en souhaitant fonder sur elles la totalité de la géométrie projective, Russell ne fait, sans encore le savoir, que reprendre le programme développé de façon magistrale par Pieri un an avant lui[66].

[64] [Russell 1899a, p. 377] : « Considérez par exemple, en Géométrie projective bidimensionnelle, quatre droites *1*, *2*, *3*, *4*. Les diagonales sont *12.34*, *13.24*, *14.23*. Nous savons alors que si les points *13*, *24* et (*12.34*)(*13.24*) sont fixés, alors (*13.24*)(*14.23*) l'est. Mais ceci ne peut être prouvé sans les trois dimensions. Car nous avons à prouver que deux droites croisent une droite donnée en un seul et même point. Or, pour *prouver* que trois droites sont concourantes, elles doivent être données sous la forme de produits de deux, ou de trois plans – *i. e.* sous la forme P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Le seul cas qui peut se produire en deux dimensions est celui où des points déterminés sont le résultat de produits ayant des facteurs communs [*The only case which can arise in two dimensions is, that they should be point-products having a common factor*] ; mais alors les droites sont *données* comme concourantes. Trois plans sont toujours concourants, et déterminent trois droites concourantes. Les droites peuvent être ainsi prouvées concourantes. Mais, en deux dimensions, rien d'analogue ne peut être trouvé. La double définition de la ligne droite est l'essence de la géométrie projective. » Voir également [Russell 1898d, p. 343].

[65] Russell ne mentionne par exemple aucun axiome d'existence, du type « si *A* et *B* sont des points distincts, il existe un point *C* qui n'est pas sur *AB* ». Russell n'introduit également aucun équivalent de l'axiome de Fano.

[66] Evitons tout de suite un malentendu : nous ne voulons pas dire que Pieri bannit, comme cherche à le faire Russell, toute considération ordinale de son système de géométrie projective. Une telle chose est tout bonnement impossible depuis les articles de Klein. De fait, dans [Pieri 1898], un concept ordinal de segment apparaît et trois axiomes sont spécifiquement destinés à garantir que la notion a les propriétés ordinales adéquates. Mais le point essentiel est le suivant : le concept de

Le fait d'avoir réuni sous une seule opération de multiplication la projection et la section est particulièrement remarquable eu égard à l'importance que revêt dans la nouvelle géométrie le principe de dualité. Une des belles idées de Russell est en effet de fonder ce principe sur la double détermination du produit mixte, comme produit progressif et régressif. L'extrait suivant, tiré d'un manuscrit daté de 1898, formule de façon très précise les choses [1898a, p. 135] :

> Si le Calcul est du $\nu^{ème}$ ordre, il est impossible de distinguer entre les éléments de la multiplicité originelle et les éléments de la multiplicité dérivée d'ordre $\nu - 1$. Tout ce que nous pouvons dire est que, si un ensemble est celui des éléments originaux, l'autre est celui des éléments dérivés. Mais les relations entre les deux sont parfaitement réciproques : comme celles entre *i* et *0* dans le Calcul Logique, elles ne diffèrent pas intrinsèquement, mais seulement par le fait d'une relation réversible spécifique qui requiert deux termes distincts. Ainsi, c'est une erreur logique de dire que nous partons des points et arrivons aux plans : nous partons des uns et arrivons aux autres, mais, sauf considérations métriques, c'est une pure erreur, et une hypothèse logiquement impossible à confirmer, de spécifier *quelles* sont les entités de base[67].

Si, dans une multiplicité extensionnelle de dimension $\nu - 1$, les noms de points sont considérés comme des noms de plans (de régions de dimension $\nu - 2$), alors les règles gouvernant la multiplication resteront valides, à condition de permuter produit progressif (projection) et produit régressif (section). Le fait d'unifier en une opération « mixte » les deux produits (progressif et régressif) a donc un sens géométrique très fort : il donne une forme calculatoire à la dualité projective[68]. On retrouve cette ligne de raisonnement dans les *Principles* [1903, p. 374-375] ; le philosophe y explique que le principe de dualité repose sur le fait que l'on peut définir les séries n-dimensionnelles soit en partant des points, soit en partant des hyperplans. C'est incontestablement la reprise de l'algèbre extensionnelle qui permet à Russell de dégager les principes fondamentaux (dont la dualité fait partie) de la géométrie projective.

Mais la démarche russellienne souffre d'un défaut fatal. Son talon d'Achille est l'affirmation selon laquelle la démonstration de l'unicité de la construction du quadrilatère suffit à développer la totalité de l'édifice projectif. Cette thèse est tout simplement fausse. Comme nous l'avons vu, le caractère lacunaire du programme développé par Staudt, qui entraîne l'impossibilité de fonder la nouvelle géométrie sur les seules relations d'incidence, est clairement établi dès 1873 par Klein. Or Russell ne paraît pas tenir compte de ce fait. En mesure-t-il toutes les conséquences ? Sait-il qu'une algèbre garantissant l'unicité de la construction du quadrilatère ne permet pas de développer, sans hypothèse supplémentaire, l'édifice de la géométrie projective classique ?

Le passage suivant pourrait attester que oui [Russell 1899d, p. 409] :

> Il n'y a qu'une seule proposition importante que [la méthode consistant à répéter les constructions du quadrilatère] soit incapable de prouver, du moins à ma connaissance. C'est cette proposition que *tous*

---

segment est définie par Pieri à partir des relations d'incidence, et c'est précisément en cela que les tentatives de Russell et le projet de Pieri se ressemblent. Pour les deux auteurs, la construction du quadrilatère doit rester seule fondamentale. Le géomètre italien n'introduit pas le concept d'ordre à titre d'indéfinissable ; c'est ce qui, aux yeux de Russell, en fait le véritable héritier de Staudt. Voir *infra*. notre section 5.

[67] « If the Calculus be of the ν^{th} order, it is impossible to distinguish between elements of the original manifold and elements of the derived manifold of order (ν - 1). All we can say is, that if one set be the original elements, the other set are the derived elements. But the relations of the two are perfectly reciprocal : like *i* and *0* in the Logical Calculus, they differ not intrinsically, but merely be the fact of a certain reversible relation which requires two distinct terms. Thus it is a logical error to say, we start with points and arrive at planes : we start with one and arrive at the other, but apart from metrics, it is a sheer mistake, and an assumption of logically impossible knowledge, to specify which we start with. » Russell, reprenant la seconde partie de [Whitehead 1898], compare la dualité projective à celle entre conjonction et disjonction dans le calcul des propositions.

[68] On trouve dans [Burali-Forti 1897, p. 48-49] une interprétation du principe de dualité qui repose semblablement sur la « mixité » du produit grassmanien. Le fait qu'une telle interprétation soit absente du traité de Whitehead [1898] (voir cependant p. 196) manifeste le relatif désintérêt de l'auteur pour la question des fondements de la géométrie.

> les points de la droite peuvent être obtenus par cette construction, et qu'il n'y a pas de lacune finie sur la droite[69].

Mais la conclusion qu'il tire de ce qui devrait être un constat d'échec semble montrer que non [*Ibid.*, p. 409] :

> Pour établir [la proposition qu'il n'y a pas de lacune finie sur la droite], je crois que des considérations métriques sont indispensables. Or, sans cette proposition, on ne peut affirmer que quatre points *quelconques* en ligne droite ont un rapport anharmonique tel qu'il vient d'être défini. Néanmoins, c'est là, à mon avis, la seule définition correcte du point de vue projectif.

Russell admet que l'on ne peut ni identifier le système harmonique avec la totalité de la droite projective[70], ni démontrer que cet ensemble est dense sur la droite ; mais il en conclut faussement que cela n'a pas d'importance – qu'en géométrie projective, la droite peut, sans conséquence, être assimilée à la série des points obtenue par itération de la construction du quadrilatère, et qu'un axiome de continuité n'est pas indispensable.

Pour compléter le programme de Staudt, Lüroth et Zeuthen avaient, on l'a vu, introduit comme terme primitif une relation ordinale de séparation sur la droite projective. La très radicale et très étrange stratégie déployée par Russell le conduit à assimiler les relations d'ordre à des relations métriques, et lui interdit d'emprunter la piste ouverte par les deux mathématiciens (auxquels il ne fait jamais référence). Citons Russell [1899a, p. 379-380] :

> La Géométrie projective n'est concernée essentiellement ni par l'ordre ni par les séries. Dans la construction du quadrilatère, si LQ_1, MN sont harmoniques, c'est un fait que M, N sont *entre* L, Q_1. Mais la Géométrie Projective ne peut pas le prouver. [...] Le seul ordre [projectif] est celui dû à la construction du quadrilatère, et il n'y a aucun moyen de le connecter avec l'ordre des points *per se*, sauf en introduisant la distance.[71]

La thèse est claire : il n'est pas possible de dériver l'ordre sur la droite de la construction du quadrilatère ; le concept de série est donc fondamentalement métrique.

La position de Russell est courageuse mais intenable. Courageuse, parce que le philosophe assume pleinement les conséquences de son axiomatisation. Il ne cherche plus, comme c'était le cas en 1897 [1897a, p. 133, 138-140], à garantir la continuité de la droite projective par un postulat spécifique. Mais elle est intenable, parce que la continuité intervient dans la démonstration de nombreux théorèmes classiques, ce que Russell, à aucun moment, ne semble réaliser. Pour lui, tout semble se passer comme si Staudt avait réussi a réaliser son programme et comme si Klein n'avait jamais rien écrit. Russell cite[72] pourtant les articles où le mathématicien allemand relève les lacunes de *Geometrie der Lage*. Mais mystérieusement, il ne paraît jamais véritablement prendre la mesure de leur contenu. Il ne paraît pas comprendre que, en excluant toute considération ordinale, ce n'est pas seulement à la continuité de la droite projective que l'on renonce, mais également, entre autres, aux théorèmes de Pascal et de Pappus – c'est-à-dire à la géométrie projective elle-même. La désinvolture dont Russell fait preuve entache ici sérieusement la rigueur qu'il affiche par ailleurs.

4- La réaction russellienne (2) : *Note on Order*

Position du problème

---

[69] [Russell 1899c, p. 445].

[70] Russell écrit même [1899d p. 409] : « On peut même démontrer que la construction de Staudt *ne donne pas* tous les points de la ligne. En effet, elle ne donne qu'une suite dénombrable de points, tandis que l'ensemble de tous les points de la ligne (continue) est de la seconde puissance (dans le langage de M. Cantor). »

[71] « Projective Geometry is not essentially concerned with order or series. I the quadrilateral construction, if LQ_1, MN be harmonic, it is a fact that M, N are *between* L, Q_1. But Projective Geometry cannot prove this. It obtains the points on a line serially, by successive quadrilaterals ; but these are three, beginning respectively with Q_1, Q_2, Q_3. And order cannot be obtained without relations between two terms, whereas here we start with relations between four. Thus the only order which occurs is that due to the quadrilaterals construction, and there is no way of connecting this with the order of points *per se* except by means of distance. »

[72] [Russell 1897a, p. 18].

Les passages dans lesquels Russell reprend et systématise le produit grassmanien ne sont pas les seuls textes que l'auteur consacrent à la géométrie durant cette période. Ils suivent ou précèdent d'autres écrits, dans lesquels le concept d'espace est traité comme un concept ordinal. Ainsi, l'article publié en 1899 en réponse à Poincaré se conclut par une définition ordinale de l'espace comme série tridimensionnelle, ou série triple [Russell 1899d, p. 412-415]. Ce genre de juxtaposition n'est absolument pas unique à l'époque ; dans tous les textes consacrés à l'espace, les passages portant sur les algèbres multiplicatives coexistent avec des textes portant sur la structure sérielle de l'espace tridimensionnel[73]. La notion d'ordre n'est donc pas absente de la pensée russellienne, et la difficulté n'est pas tant d'expliquer sa disparition que de comprendre comment les considérations ordinales, officiellement exclues de la méthode projective, sont malgré tout parfois réinsérées au cœur de la réflexion russellienne.

On pourrait croire que cette hétérogénéité dans les manuscrits n'est finalement que la perpétuation de la division du livre III de l'*Essay* (1897), dont la première partie est consacrée à la géométrie projective, et la seconde à la géométrie métrique. A l'élaboration d'une algèbre purement projective, Russell juxtaposerait des recherches sur la géométrie métrique, visant à axiomatiser complètement la discipline[74]. L'ordre étant un concept métrique, les textes sur les séries, loin de le contredire, confirmeraient l'ostracisme auquel, selon Russell, la notion doit faire l'objet en géométrie projective.

Mais une telle interprétation ne tient pas. A plusieurs reprises en effet, le philosophe affirme que la relation d'ordre est purement projective – mieux, que la géométrie projective se définit comme l'étude des séries. Ainsi apprend-on, au détour d'une phrase, que « au point de vue projectif, où l'on considère exclusivement l'ordre, … » [Russell 1898e, p. 425]. Le caractère central des considérations ordinales est également manifeste dans cet extrait de *Note on Order* [Russell 1898d, p. 342] :

> « Si quatre termes *A*, *B*, *C*, *D* sont choisis dans une série close, les quatre termes peuvent toujours être arrangés en paires d'une façon telle que, commençant à partir d'un terme quelconque, et revenant vers ce même terme, les deux termes qui le suivent sont les termes de la paire opposée. » […]. L'axiome qui précède est important, lorsque, comme en géométrie projective, nous étudions les séries homographiques. Car si *ABCD*, *A'B'C'D'* sont deux séries homographiques, *A* correspondant à *A'*, etc…, alors si *A*, *C* sont séparés par *B*, *D* ; *A'*, *C'* doivent être séparés par *B'*, *D'*.[75]

Si le concept d'ordre est un concept projectif, c'est parce que, explique ici en substance Russell, la relation de séparation est un invariant homographique[76].

La division que reflètent les manuscrits de la période n'est donc pas une division entre géométrie projective et géométrie métrique ; elle est une division, là réside le problème, qui passe à l'intérieur même de la géométrie projective. Russell affirme à la fois que l'ordre est et n'est pas un concept projectif[77]. Comment concilier les deux thèses ? Comment articuler l'élaboration d'une axiomatique projective fondée sur l'incidence, avec une recherche mathématique visant à lier géométrie projective et relation d'ordre ?

---

[73] Le phénomène est particulièrement flagrant dans [Russell 1899a]. Les deux premières parties sont consacrées à le réélaboration du calcul de l'extension ; la troisième partie, à l'analyse des relations sérielles.

[74] Russell reprendrait ce qu'il avait développé dans *An Essay* [1897a p. 147-174].

[75] « "If any four terms A, B, C, D be chosen from a closed series, the four may always be so divided into pairs that, starting with any one term, and returning to that term again, the two terms next any term are the terms of the opposite pair." [...] The above axiom is important when, as in projective Geometry, we are studying homographic series. For if ABCD, A'B'C'D' be two homographic series, and A corresponds to A' etc., then if A, C be separated by B, D ; A', C' must be separated by B', D'. »

[76] C'est dans les premières pages de [1898d] que Russell différencie, pour la première fois, les ordres ouverts et des ordres clos. La distinction est déjà présente dans le livre de Whitehead [1898, p. 127].

[77] Rappelons, en effet, la thèse énoncée par Russell [1899a] – « la Géométrie projective n'est concernée essentiellement ni par l'ordre ni par les séries »

Le caractère schizophrénique de la pensée russellienne provient directement, selon nous, de la division qui traverse l'analyse que Whitehead élabore de la géométrie projective au livre III et IV de sa *Treatrise on Universal Algebra*. Russell prétend, dans la lettre à Couturat, que le concept de multiplicité positionnelle est métrique. Mais dans les textes que nous allons examiner, le philosophe modifie la description de ces structures de façon à rendre apparent leur caractère purement projectif – et c'est dans ce but qu'il est conduit à substituer à la notion, projectivement suspecte, d'intensité, celle, plus neutre, de série. Autrement dit, la présence, dans les manuscrits de la période, de deux genres très hétérogènes de considération, loin de signaler une reprise du projet de 1897 [1897a], est une conséquence directe du traité de Whitehead [1898]. Russell reprendrait la distinction grassmanienne entre multiplicité positionnelle et multiplicité extensionnelle, mais échouerait à ajuster cette distinction à la séparation classique entre géométrie métrique et géométrie projective.

De l'intensité à la série : une nouvelle approche des multiplicités positionnelles

Dans *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Russell établit une analogie entre qualité et quantité d'une part, géométrie de position et géométrie métrique de l'autre : la théorie projective est définie comme une géométrie qualitative, libre de tout présupposé quantitatif ; la géométrie métrique est, elle, considérée comme quantitative. Pour Russell à l'époque, deux quantités ne diffèrent entre elles que sur fond d'identité qualitative ; inversement, aucune évaluation quantitative d'une différence qualitative n'est possible. Par exemple, la différence entre deux segments d'une droite est mesurable parce que les deux segments possèdent la qualité d'appartenir à la même droite ; mais il est par contre impossible de mesurer la différence entre deux droites qualitativement distinctes. A cette époque, l'antériorité logique de l'identité qualitative sur la variation quantitative est importante pour Russell [1897a] car elle fonde l'antériorité logique de l'étude qualitative de l'espace (la géométrie projective) sur son traitement quantitatif (la géométrie métrique).

La lecture du traité de Whitehead [1898] conduit Russell à mettre en cause cette ligne de pensée. Le philosophe va en effet soutenir que, dans les multiplicités positionnelles, les différences qualitatives font l'objet d'une évaluation quantitative. Reportons-nous à la quatrième partie du manuscrit *On Quantity and Allied Conceptions* [Russell 1898a, p. 134-135] :

> Il faut observer que *chaque* élément de la multiplicité [positionnelle] a une qualité unique, différente de celle de n'importe quel autre élément. […] Les extraordinaires $e_1, e_2, \dots, e_\nu$ ne sont pas des quantités, mais leurs différences sont des quantités. Si nous désignons ces différences par $e_2 - e_1$, etc…, alors $e_2 - e_1$ est l'unité pour ce genre de différence qualitative qui existe entre e_2 et e_1. Si la quantité de cette différence par rapport à e_1 est ξ_{12}, nous aurions à ajouter $\xi_{12}(e_2 - e_1)$ de cette différence pour obtenir le nouvel élément. Ainsi, n'importe quel élément [est de la forme] $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \dots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$, ou $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_\nu e_\nu$.[78]

Russell, en accord avec Whitehead, commence par affirmer que les extraordinaires sont des qualités, qui varient selon l'intensité. Mais il poursuit : la différence entre deux extraordinaires e_1 et e_2 engendre une nouvelle entité qualitative $e_2 - e_1$ (un « genre de différence qualitative ») susceptible de variation quantitative. Ainsi, $e_2 - e_1$ est à la fois une direction (une qualité), et une unité (une quantité) que l'on peut multiplier par un scalaire pour repérer n'importe quel point de la droite e_1e_2 : à e_1, on peut ajouter une quantité ξ_{12} de la différence qualitative $e_2 - e_1$ pour indiquer un élément quelconque de e_1e_2.

[78] « It is to be observed that every element of the manifold has a unique quality, different from that of any other element. […] The extraordinaries $e_1, e_2, \dots, e_\nu$ are not quantities, but their differences are quantities. If we denote these differences by $e_2 - e_1$ etc., then $e_2 - e_1$ is the unit for that kind qualitative difference which exists between e_2 and e_1. If the quantity of this difference from e_1 is ξ_{12}, we shall have to add $\xi_{12}(e_2 - e_1)$ of this difference to get the new element. Thus any element is $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \dots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$, or $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_\nu e_\nu$. »

Cette analyse rompt avec l'ancien schéma qui n'attribuait de quantité qu'à une qualité préalablement identifiée. Dans les *positional manifold*, il est possible de soustraire des entités qualitatives et d'engendrer ainsi de nouvelles qualités auxquelles une quantité est attachée. Cette rupture n'est pas simplement une conséquence de la lecture de Whitehead [1898] ; elle est le fruit d'une critique de la présentation adoptée par Whitehead. Celui-ci définissait en effet la droite e_1e_2 comme l'ensemble des points de forme $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, et non pas comme la série de forme $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$[79]. D'un point de vue strictement mathématique, les deux notations sont équivalentes. Mais si Russell préfère la seconde forme, c'est parce que les quantités (les scalaires) y sont directement attachées à la différence entre extraordinaires. Comme il l'explique dans la suite du passage cité plus haut [Russell 1898a, p. 135] :

> … n'importe quel élément [est de la forme] $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \ldots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$, ou $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_\nu e_\nu$. De ce point de vue, l'intensité définie par Whitehead n'existe pas, car $\xi_1 e_1$ *per se* ne diffère en rien de ξ_1. La ligne droite joignant e_1 et e_2 est cet assemblage d'éléments $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$ qui diffèrent de e_1 et qui diffèrent entre eux seulement par ce type de différence qui distingue e_2 relativement à e_1. – Les intensités ne deviendraient importantes que si chaque élément était considéré comme une *chose*, ou un point matériel, doté d'une masse plus ou moins grande.[80]

La présentation de Whitehead camoufle ce qui, aux yeux de Russell, fait l'intérêt conceptuel du calcul positionnel. L'écriture $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_\nu e_\nu$ reconduit le schéma classique et statique qui veut qu'à une qualité « e_i » soit associée une quantité « ξ_i ». Le mode d'expression proposé par Russell rend au contraire visible le fait que l'algèbre grassmanienne soumet à un calcul l'engendrement de nouvelles qualités à partir de qualités données[81]. Les multiplicités positionnelles sont, pour Russell, moins un mélange douteux de considérations qualitatives (projectives) et quantitatives (métriques), qu'une nouvelle articulation dynamique entre différents types de qualité.

Dans la terminologie de l'époque, cela revient à dire que le calcul positionnel porte sur les séries[82]. La notion de série prend le pas, dans les textes de la période, sur le couple quantité / qualité, qu'elle tend à fonder en un seul tout [Russell 1898d, p. 343] :

> Une série est constituée par une seule propriété que les termes possèdent selon des grandeurs variables. Si, donc, nous considérons deux termes appartenant à une série, ils doivent être complètement identiques dans toutes leurs propriétés à l'exception d'une seule, et, selon cette propriété, ils doivent différer suivant la grandeur. Ainsi, la propriété en laquelle ils diffèrent en grandeur détermine la série : deux termes déterminent tous les autres termes[83].

---

[79] Le philosophe généralise immédiatement son résultat à des multiplicités d'ordre quelconque : « n'importe quel élément [de la multiplicité originale peut être déterminé comme] $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \ldots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$ ».

[80] « ... any element is $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1) + \ldots + \xi_{1\nu}(e_\nu - e_1)$, or $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_\nu e_\nu$. On this view, intensity as defined by Whitehead does not exist, for $\xi_1 e_1$ *per se* is no way different from ξ_1. The straight line joining e_1 and e_2 is that assemblage of elements $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$ which differ from e_1 and from each other only with that kind of difference with which differs e_2 from e_1. – Intensity would become important if each element were regarded as a *thing*, or mass-point, with more or less mass in it. »

[81] La manœuvre de Russell ressemble, à certains égards, à celle qu'il propose dans *On Denoting* (1905). Il est possible de considérer les « ξ_i » de Whitehead comme des sortes de symboles incomplets – comme des parties non autonomes du nom « ξ_{1i} » attaché au symbole « $e_i - e_1$ ».

[82] Le terme n'a pas chez Russell l'acception mathématique précise qu'il a aujourd'hui. Il désigne simplement une structure d'ordre (total) sur un ensemble fini ou infini. Une série n'est ainsi pas nécessairement continue et une des difficultés pour Russell est de concilier l'ordre « ouvert » de la série avec l'ordre « clos » de la droite projective (voir *infra*.). Notons que Russell n'emploie pas le terme de série dans [1898a]. Mais, dans [1898d], le mot est utilisé pour désigner l'ensemble des entités engendrées par la différence de deux positions ; ainsi, p. 349 : « Soient e_1, e_2 deux points différents ; […] $e_2 - e_1$ est une unité, dont on peut considérer n'importe quel multiple ; nous obtenons de cette manière d'autres différences par rapport à e_1, qui ne diffère que par la quantité par rapport à la différence entre e_2 et e_1. Si ξ_{12} est un multiple numérique, n'importe quel point de la série déterminée par e_1 et par e_2 est $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$. »

[83] « A series is constituted by a single property which the terms possess in varying magnitudes. If, then, we have two terms belonging to a series, they must be completely identical in all properties except one, and in that one, they must differ as to magnitude. Thus the one property in which they differ as to magnitude determines the series : two terms determine all the other terms ». Il faudrait ici développer l'analyse des premières conceptions russelliennes de l'ordre. Nous ne traiterons pas de ce sujet qui justifierait à lui seul un autre travail. Voir plus loin, pour quelques indications supplémentaires.

Un élément d'une série n'est ni une qualité, ni une quantité, mais une grandeur orientée ou un vecteur (un déplacement), c'est-à-dire l'unité d'une quantité et d'une qualité. La différence (quantitative) de deux éléments quelconques de la série définit « la propriété en laquelle [les deux éléments] diffèrent en grandeur » (qualité), et c'est la nature sérielle de la droite e_1e_2 qui est reflétée dans l'expression analytique « $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$ ». La qualité (c'est-à-dire la direction à partir du point e_1) reste identique dans toute la série ($e_1 + ...(e_2 - e_1)$) ; seule la quantité (la distance par rapport à e_1 exprimé par le paramètre ξ_{12}) varie[84].
Dans la lettre à Couturat, Russell disqualifiait le calcul positionnel. L'algèbre additive, dans la mesure où elle faisait référence à des intensités, n'était pas exempte de toute « souillure » métrique. Dans les extraits que nous venons de citer, une autre image se fait jour. Les multiplicités positionnelles sont utilisées comme un levier permettant de renverser le partage qualitatif / quantitatif sur lequel était fondée la distinction entre géométrie projective et géométrie métrique. Le problème ouvert par le repositionnement russellien est de savoir en quel sens la différence projectif / métrique peut survivre à l'abandon du couple qualité / quantité. Et de ce point de vue, on pourrait estimer que Russell ne fait que déplacer la question. La difficulté liée, dans la présentation whiteheadienne, à la combinaison d'une quantité et d'une qualité resurgit en effet lorsque l'on cherche à interpréter les produits (« $\xi_{1i}(e_i - e_1)$ ») entre scalaire et déplacement. Les séries (engendrées par ces produits) demeurent, dans les textes que nous avons commentés, liées aux intensités, et restent, dans cette mesure, projectivement suspectes. La théorie réaliste des relations, qui rend possible, à partir de 1900, une définition logique de l'ordre (indépendante de toute référence au couple quantité / qualité), n'est pas, à cette époque, encore développée, et l'absence d'une caractérisation positive des notions ordinales empêche de régler la question du statut des séries et des multiplicités positionnelles[85].
Le déplacement opéré par Russell n'en demeure pas moins fondamental. Si le philosophe accorde, dans les *Principles* (1903), un tel poids aux concepts ordinaux, c'est parce que la pratique mathématique l'exige. Russell souligne ainsi dans le livre V [1903, p. 287-303] le caractère purement ordinal de la construction arithmétique du continu. Mais, comme le note N. Griffin, l'accent mis sur les relations d'ordre provient également d'une autre partie des mathématiques : la géométrie, et plus précisément, les espaces vectoriels [Griffin 1991, p. 346-360][86]. Russell souligne, en modifiant la présentation de Whitehead, le caractère irréductible des grandeurs orientées que sont les déplacements. Ni pure quantité (les vecteurs ont un sens), ni pure qualité (ils sont le résultat d'une différence), ces entités obligent à articuler autrement les concepts géométriques fondamentaux. Russell, en 1898-1899, n'a certes pas encore une théorie élaborée et stable de ces objets. Mais il a suffisamment de sens mathématique pour comprendre l'importance de ce qui se joue là, et suffisamment d'allant philosophique pour tenter d'adapter son cadre conceptuel aux nouvelles données.

De la série aux séries multidimensionnelles : une nouvelle approche de la géométrie projective

Nous avons annoncé que le philosophe définissait les multiplicités positionnelles comme des séries multiples. Or, jusqu'à présent, seule la définition de la droite comme série de points a

[84] Russell consacre alors beaucoup de textes à la notion de quantité. L'enjeu principal consiste à faire une place, au sein d'une pensée très classique de la quantité et de la grandeur (comparable par certains de ces aspects aux discussions médiévales concernant la rémission et l'intensification des formes), à ce calcul des rapports entre qualités qu'est pour Russell le calcul vectoriel.
[85] Sur le développement de la théorie des relations et son rôle fondamental dans la genèse du logicisme, voir [Griffin 1991] (surtout chap. 7, 8 et 9) et [Hylton 1990].
[86] Griffin souligne que la question de l'ordre apparaît d'abord liée chez Russell (comme chez Kant) à une interrogation sur les nombres négatifs. Mais il pointe également l'importance de *Note on Order* (consacrée aux multiplicités positionnelles).

été évoquée. Dans un passage de *Note on Order* [Russell 1898d], consacré à la construction d'un système de coordonnée, Russell montre comment sa conception peut être étendue à une multiplicité d'ordre quelconque. Le philosophe commence par rappeler les grandes lignes de son approche [1898d, p. 349] :

> Soient e_1, e_2 deux points différents. Alors la différence de positions peut être désignée, bien que e_1 et e_2 ne soient pas des quantités, par $e_2 - e_1$. […] Maintenant, $e_2 - e_1$ est une unité, dont on peut considérer n'importe quel multiple. […] Si ξ_{12} est un multiple numérique, n'importe quel point de la série déterminée par e_1 et par e_2 est $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$.[87]

Il la complique ensuite :

> Soit maintenant e_3 un troisième point. Alors $e_3 - e_1$ diffère qualitativement de $e_2 - e_1$, mais la différence est une quantité.[88]

Russell affirme ici que la différence entre les deux différences $e_3 - e_1$ et $e_2 - e_1$ (entre les deux directions e_3e_1 *et* e_2e_1) est une différence qualitative, assimilable à la différence entre les deux positions e_2 et e_1 de la multiplicité originelle[89]. Il ajoute ensuite que cette différence entre deux différences « est une quantité » : de même que la différence entre deux positions est à la fois une qualité et une unité dont on peut considérer n'importe quelle quantité, de même la différence entre deux directions est une unité qualitative « dont on peut considérer n'importe quel multiple » – formulé autrement, la différence entre deux différences de position engendre une série de séries de positions, c'est-à-dire une série d'angles orientés.

Poursuivons la lecture [1898d, p. 349] :

> […] N'importe quel point de la série déterminée par e_3 et e_1 est $e_1 + \xi_{13}(e_3 - e_1)$. La différence entre [ce point] et un point de e_1e_2 est $\xi_{13}(e_3 - e_1) - \xi_{12}(e_2 - e_1)$. Ainsi une série complète de lignes droites passant par e_1 est déterminée par la différence entre $e_3 - e_1$ et $e_2 - e_1$. La qualité de n'importe quelle ligne droite de cette série est
>
> [1] $e_2 - e_1 + \eta_{23}\{(e_3 - e_1) - (e_2 - e_1)\}$ ou $e_2 - e_1 + \eta_{23}(e_3 - e_2)$
>
> Ainsi n'importe quel point sur la droite est
>
> [2] $e_1 + \xi_{123}\{(e_2 - e_1) + \eta_{23}(e_3 - e_2)\}$,
>
> qui est identique à
>
> [3] $e_1 + k\{\xi_{13}(e_3 - e_1) - \xi_{12}(e_2 - e_1)\}$.
>
> Tous ces points sont contenus dans $\xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \xi_3e_3$.[90]

La première expression [1] désigne un élément quelconque du faisceau de sommet e_1. L'élément en question (une droite orientée) est associé au paramètre η_{23}, exactement comme le point $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$ avait pour coordonnée ξ_{12}. Les deux autres formules ([2] et [3]) désignent un élément quelconque de la *manifold* d'ordre 3 engendré par e_1, e_2 et e_3 (du plan $e_1e_2e_3$). Chaque élément de la multiplicité est présenté comme le membre d'une série de série. [2] est à cet égard la forme la plus claire : un point quelconque e du plan $e_1e_2e_3$ est considéré comme l'élément d'une droite (le point est repéré sur la droite par l'expression $e_1 + \xi_{123}\{...\}$) – droite, qui est elle-même élément d'un faisceau (la position de la droite dans le faisceau est donnée par l'expression $...\{e_2 - e_1 + \eta_{23}((e_3 - e_1) - (e_2 - e_1))\}$). L'emboîtement des

[87] « Let e_1 be some point and e_2 some other point. Then the difference of position may be denoted, though e_1 and e_2 are not quantities, by $e_2 - e_1$. [...] Now $e_2 - e_1$ is a unit, of which any multiple may be taken [...]. If ξ_{12} be a numerical multiple, any point of the series determined by e_1 and e_2 is $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$. »

[88] « Now let e_3 be a third point. Then $e_3 - e_1$ differs qualitatively from $e_2 - e_1$, but the difference is a quantity. »

[89] Il suppose implicitement que e_3 est indépendant de e_1 et e_2, c'est-à-dire, dans le langage géométrique, que e_3 n'est pas colinéaire à e_1 et e_2.

[90] « [...] any point of the series determined by e_3 and e_1 is $e_1 + \xi_{13}(e_3 - e_1)$. The difference of this from a point on e_1e_2 is $\xi_{13}(e_3 - e_1) - \xi_{12}(e_2 - e_1)$. Now a whole series of straight lines through is determined by the difference between $e_3 - e_1$ and $e_2 - e_1$. The quality of any straight line of this series is

$e_2 - e_1 + \eta_{23}\{(e_3 - e_1) - (e_2 - e_1)\}$ ou $e_2 - e_1 + \eta_{23}(e_3 - e_2)$

Thus any point on such a line is

$e_1 + \xi_{123}\{(e_2 - e_1) + \eta_{23}(e_3 - e_2)\}$,

which is the same as

$e_1 + k\{\xi_{13}(e_3 - e_1) - \xi_{12}(e_2 - e_1)\}$.

All such points are included in $\xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \xi_3e_3$. »

parenthèses reflète ici de façon très élégante l'emboîtement des différentes séries géométriques : le scalaire extérieur ξ_{123} repère la position du point sur la droite orientée d'un faisceau, droite orientée elle-même repérée par le paramètre intérieur η_{23} (voir figure 2).

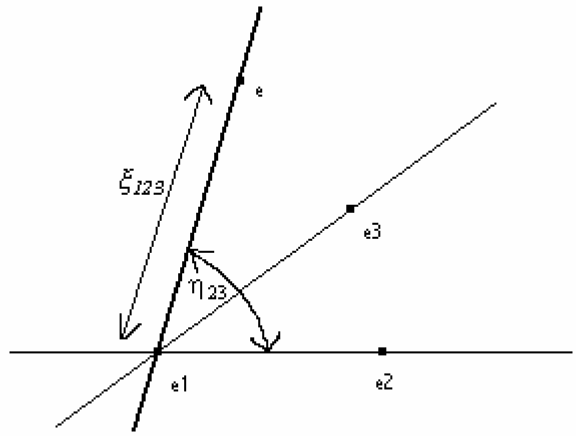

Figure 2 : la droite e_1e est une droite du faisceau centré en e_1 ; elle est repérée par le paramètre η_{23}. Le point e sur cette droite est repéré par le paramètre ξ_{123}.

D'un point de vue mathématique, la présentation russellienne équivaut, là encore, à celle de Whitehead. Un élément quelconque d'une multiplicité positionnelle d'ordre 3 engendrée par les points e_1, e_2 et e_3 peut être représenté indifféremment par $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ et par $e_1 + \xi_{123}\{(e_2 - e_1) + \eta_{23}(e_3 - e_2)\}$. La différence entre les deux modes de notation ne se manifeste que lorsque que l'on se pose la question « philosophique » de la nature de la *positional manifold*. Russell ne cherche pas, comme le fait l'algébriste Whitehead, à caractériser une multiplicité positionnelle par des règles calculatoires. Il tente plutôt d'identifier les expressions analytiques qui ont une interprétation géométrique évidente. La forme développée, systématiquement choisie par Whitehead, n'est pas, de ce point de vue, la plus éclairante ; elle masque la structuration fine de ce sur quoi elle porte réellement. Au contraire, le regroupement de certains signes au sein d'une même parenthèse, puis l'emboîtement des différentes parenthèses au sein de la même formule, si elle complique la notation, permet à Russell de manifester de façon claire l'organisation géométrique interne du contenu exprimé. Ainsi, on retrouve, dans la syntaxe même de l'expression [2], les éléments projectifs fondamentaux que sont la série de points et le faisceau de droites[91].

Russell insiste beaucoup également sur la dimension dynamique de l'engendrement des séries d'ordre supérieur à partir de la série linéaire[92]. Ainsi en va-t-il de la série des angles orientés. Dans la forme analytique [2] de l'extrait reproduit plus haut, la série des angles est donnée. C'est certainement pour corriger cette impression que Russell ajoute un autre mode de présentation, [3], équivalent à [2]. En [3], un point quelconque e du plan $e_1e_2e_3$ est conçu comme l'élément d'une droite joignant un point quelconque de e_1e_2 (différent de e_1) à un point quelconque de e_1e_3 (différent de e_1). La position du point e est donc repérée à l'aide de trois quantités, k, ξ_{13}, ξ_{12}, paramétrant tous des éléments sur des droites (ξ_{12}, un point e' sur la droite e_1e_2 ; ξ_{13}, un point e'' sur la droite e_1e_3 ; k, le point e repéré sur la droite joignant les deux points précédents). Le scalaire qui se substitue ici à la mesure angulaire η_{23} est le paramètre k,

[91] On pourrait, en ajoutant un quatrième élément, donner, d'une façon tout aussi naturelle, un équivalent analytique au faisceau de plan

[92] Voir la fin de [Russell 1899d], et également [Russell 1898c].

c'est-à-dire la coordonnée de l'intersection de la droite orientée repérée par η_{23} avec la droite joignant les deux points repérés par ξ_{12} et ξ_{13} sur e_1e_2 et e_1e_3 (fig. 3). Au lieu d'indiquer la droite e_1e du faisceau centré en e_1 par l'angle η_{23}, Russell la désigne par la position de son intersection e sur la série linéaire D. Le fait que les droites du faisceau forment une série n'apparaît pas ici comme un fait primitif, mais découle de la possibilité de regrouper les points dans différentes séries unidimensionnelles[93].

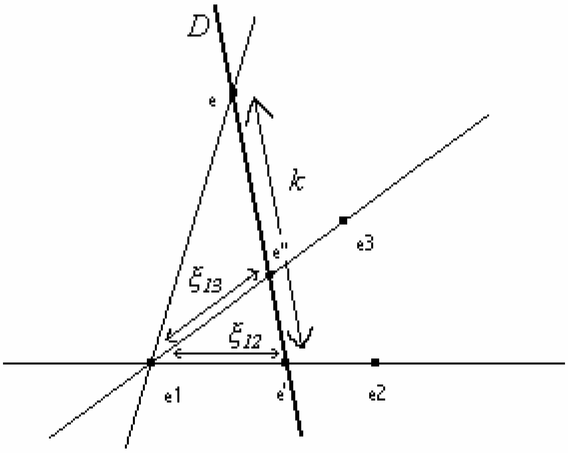

Figure 3 : à la différence de la figure 2, le point *e* est repéré à l'aide de trois paramètres linéaires.

La façon dont Russell conçoit l'articulation et l'engendrement des séries au sein des multiplicités positionnelles ne constitue pas seulement une complexification technique de l'analyse. Elle souligne l'existence d'une relation très étroite entre le concept grassmanien et les modes de raisonnement utilisés en géométrie projective. La possibilité d'engendrer les séries d'ordre supérieur ou égal à deux à partir de la série linéaire représente ainsi une traduction algébrique de la relation homographique de corrélation, qui lie différents types d'élément spatial en préservant la relation de séparation à l'intérieur des formes[94]. C'est seulement parce que l'ordre gouvernant une série de points est le même que celui établi sur le faisceau de droite qui en est l'image par corrélation que l'on peut substituer à la référence aux angles une référence aux paramètres linéaires, et passer de la forme [2] à la forme [3][95]. Dans la *Note on Order* (1898), Russell, en centrant l'analyse des *positional manifold* sur le concept de série de séries ν fois itérées, retrouve dans les concepts grassmaniens des modes de raisonnement constamment utilisés en géométrie projective.

Récapitulons. L'étude précise du fonctionnement des multiplicités positionnelles conduit Russell, comme nous l'avons vu dans la section précédente, à abandonner l'opposition entre quantité et qualité sur laquelle il fondait, en 1897, l'opposition entre géométrie projective et

[93] Pour être recevable, l'argument devrait cependant garantir que l'ordre angulaire induit ne dépend pas du choix de la droite *D* sectionnant le faisceau. Russell montre précisément, dans une note publiée comme appendice dans le second volume des *Collected Papers* [Russell 1899b], que c'est bien le cas. Mieux, il prouve que la valeur du rapport anharmonique entre les intersections de quatre droites du faisceau ne dépend pas de la droite *D* choisie, et peut donc directement être attribué aux éléments de la série de droites.

[94] Depuis Möbius, les géomètres distinguent traditionnellement deux transformations homographiques fondamentales : les colinéations, qui sont des relations point-point préservant la colinéarité ; les corrélations, qui sont des relations points-droites telles que des points colinéaires correspondent à des droites concourantes. Voir [Coxeter 1949, p. 52-69].

[95] Insistons sur le fait que l'origine de la distinction entre série fondamentale et série dérivée (ou série « par corrélation ») est géométrique. Le titre du chapitre consacré dans les *Principles* à ce sujet est d'ailleurs très évocateur : « corrélation de séries » – c'est bien au premier chef de la corrélation entre droite ponctuelle et faisceau de droite dans le plan projectif dont il est question dans toute cette affaire.

géométrie métrique. L'analyse du rapport des différentes séries au sein des multiplicités positionnelles l'oblige à faire un pas de plus dans la reconnaissance du caractère non métrique de ces structures : des concepts aussi purement projectifs que les séries linéaires de points, que les faisceaux de droites, que les corrélations point / droite dans le plan, etc…, trouvent naturellement leur place au sein des procédures algébriques développées par Grassmann et Whitehead. Officiellement, la méthode purement projective reste celle du calcul extensionnel, complètement détachée de l'algèbre additive. Mais Russell se rend compte que les choses sont plus complexes, et qu'il y a bien, comme son maître l'affirmait, une relation très intime, supportée par le concept de série, entre les multiplicités positionnelles et la géométrie pure (non métrique). Russell se montre cependant incapable de donner un statut clair à la notion d'ordre, coincé entre le projectif et le métrique. Il affirme ainsi [1898c, p. 130] que le point de vue lié aux multiplicités positionnelles « semble constituer un compromis entre les méthodes projectives et métriques ». Ailleurs [1899a, p. 374], il soutient que c'est « la géométrie métrique [qui] est un composé de la géométrie projective et de la géométrie des multiplicités positionnelles »[96]. Ce flottement montre non seulement que Russell ne maîtrise pas la relation entre les concepts d'ordre et de quantité – mais plus grave, que les recherches mathématiques qu'il conduit alors ne s'inscrivent dans aucun cadre théorique unifié. Russell ne développe aucune tentative crédible pour ajuster la différence géométrie pure / géométrie métrique à la division qui oppose, au sein de sa propre pensée, les recherches fondées sur le livre IV à celles qui reposent sur le livre III de [Whitehead 1898][97].

5- La rencontre avec l'école italienne et la différence entre géométrie projective et géométrie descriptive

Le problème et sa résolution dans les Principles (1903)

Nous voilà revenu à Whitehead. Alors que Russell avait su diagnostiquer très tôt et très précisément les défauts structurels affectant l'édifice de son maître, il les a, dans ses propres recherches, reconduits. Faut-il pour autant parler d'un retour en arrière ? En aucun cas. Russell, à la différence de Whitehead, focalise toute son attention sur le démembrement de la géométrie projective. Son enquête, en cela proprement philosophique, vise à supprimer une telle division pour identifier une essence du projectif. Si Russell échoue dans son entreprise, le résultat n'en est pas moins intéressant, puisqu'il tend à faire reposer la géométrie projective sur deux concepts, et deux seulement, les relations d'ordre et les relations d'incidence. A l'époque, le philosophe voit ces deux caractérisations comme incompatibles l'une avec l'autre : la « méthode vraiment projective » doit être fondée sur l'incidence, et non pas sur l'ordre[98]. Mais, malgré tout, avoir perçu que ces relations étaient toutes deux présentes dans la géométrie projective, à une époque où Hilbert n'avait pas encore écrit ses *Grundlagen*[99], est

---

[96] Voir également [Russell 1899d, p. 414-415]. Signalons que le concept d'espace vectoriel réapparaît dans la partie VI des *Principia*. La notion de multiplicité positionnelle y est considérée à la fois comme le socle de la théorie de la quantité et comme le moyen permettant d'introduire géométriquement des coordonnées sur un espace. Pour plus de précisions, voir [Whitehead 1913] et [Quine 1941].

[97] N. Griffin, dans son étude sur les années de formation de Russell, fait comme si, autour des années 1898-1899, le lien entre le concept d'ordre et la géométrie projective allait de soi [Griffin 1991, p. 356]. Nous ne pouvons pas suivre le commentateur sur ce point. Les textes que Russell consacre à la géométrie révèlent l'existence de deux courants de pensée opposés : le premier lie la géométrie projective aux relations d'incidence ; le second la relie, *via* les multiplicités positionnelles, aux séries. Officiellement à l'époque, et ce malgré toutes les hésitations que l'on a décrites, l'ordre n'est pas un concept projectif fondamental.

[98] Ce qui ne peut pas être, étant donné l'échec du programme de Staudt. Comme on l'a déjà souligné et comme on va le voir plus loin de façon plus précise, même Pieri définit un concept ordinal de segment et pose un certain nombre d'axiomes supplémentaires pour le doter des « bonnes » propriétés.

[99] Rappelons que Hilbert fait paraître son livre en 1899, c'est-à-dire à la fin de la période que nous étudions ; et que Veblen et Young ne publient leur classique *Projective Geometry* qu'en 1910.

impressionnant et représente une avancée significative par rapport à Whitehead (1898]. Cela est d'autant plus remarquable que Russell semble ignorer le contexte mathématique dans lequel se déploient les recherches hilbertiennes. Le philosophe anglais, nous l'avons déjà noté, ne mentionne pas la preuve de Lüroth-Zeuthen. La seule matière première mathématique véritablement convoquée et affrontée dans les manuscrits de la période 1898-1899 est celle fournie par le livre de Whitehead. On ne peut pas faire crédit à Russell de son inculture. Mais on peut être impressionné par l'intuition analytique et l'audace dont le jeune auteur fait preuve.

Comment se résout, dans le livre VI des *Principles*, rédigé pour l'essentiel en 1900[100], le conflit entre les deux approches rivales de la géométrie projective ? Russell reprend la distinction de *An Essay* entre géométrie métrique (chap. 47) et non-métrique (chap. 45 et 46) ; mais il offre désormais deux présentations différentes de la géométrie pure : l'une, fondée sur les seules relations d'incidence, est basée sur les travaux de M. Pieri[101] (c'est la géométrie projective proprement dite, exposée au chap. 45) ; l'autre, fondée sur la relation d'ordre, est basée sur l'œuvre de M. Pasch reformulée par G. Peano[102] (c'est la géométrie descriptive, exposée au chap. 46). La même organisation structure les deux traités de Whitehead *The axioms of projective geometry* (1906) et *The axioms of descriptive geometry* (1907), qui précisent et affinent le contenu des deux chapitres des *Principles*.

Russell n'adopte pas, en 1903, la présentation aujourd'hui standard consistant à distinguer au sein de l'axiomatique de la géométrie projective, deux groupes de postulats distincts, le groupe des axiomes d'incidence et celui des axiomes d'ordre[103]. Le philosophe préfère distinguer deux types de géométries : une fondée sur la seule relation d'incidence ; l'autre fondée sur l'ordre. Précisons-le tout de suite, cette décision n'a pas les conséquences dévastatrices que l'on aurait pu craindre : comme nous allons bientôt le voir, Pieri, sur lequel s'appuie Russell dans le chapitre sur la géométrie projective, parvient à définir à l'aide des seules relations d'incidence une relation de séparation sur la droite, et peut donc énoncer un postulat de continuité qui permet d'accomplir le programme de Staudt. Au final, il y a donc, selon Russell, deux présentations possibles, également légitimes, de la géométrie de position : une présentation purement projective, fondée sur les relations d'incidence et la construction du quadrilatère, et une présentation descriptive, qui, à partir de la relation « entre » permet, par construction, d'engendrer l'espace projectif.

Il n'y a, à première vue, aucun rapport entre le couple calcul de l'extension / algèbre positionnel et le couple axiomatique de Pieri / axiomatique de Peano. Les outils convoqués, les démarches utilisées, les résultats obtenus sont ici et là extrêmement différents. Pour autant, il n'est pas interdit de voir dans la juxtaposition de deux géométries non métriques des *Principles* une prolongement de l'opposition (non maîtrisée) entre algèbre multiplicative et calcul positionnel[104]. Une telle lecture est autorisée d'abord par la lettre même des propos tenus à Couturat en juin 1900. Russell y maintient, rappelons-le, que « l'algèbre de Grassmann (même avant la multiplication) n'est pas celle de la géométrie projective toute pure […]. C'est pour cette raison que Whitehead, qui est d'accord avec moi en ceci, parle de géométrie *descriptive*, non *projective* » [Russell-Couturat 1897-1913, p. 182]. La distinction

[100] L'essentiel des six derniers livres des *Principles* a été écrit en 1900. Sur l'histoire mouvementée de cette rédaction, et notamment de la partie VI, voir [Byrd 1999].

[101] [Pieri 1898].

[102] [Pasch 1882] ; [Peano 1894].

[103] Voir par exemple [Coxeter 1949, p. 12 et p. 22].

[104] Nabonnand [2000, p. 222, 248] suggère, un peu à la manière de Toretti, que l'axiomatique présentée dans [Russell 1899d] est inspirée de Pieri. Il nous semble qu'une telle interprétation pose un problème chronologique : le philosophe élabore son système avant août 1899 (date à laquelle il envoie à Couturat son manuscrit), alors que dans la lettre à Couturat du 9 octobre 1899 [Couturat 1897-1913, p. 138-139], Russell affirme ne pas encore avoir lu Peano. Toutefois, comme nous allons le défendre, les deux approches se rejoignent en ce qu'elles ne reconnaissent qu'un indéfinissable relationnel : l'incidence.

descriptif / projectif désigne ici, non pas la différence entre l'approche de Pasch et celle de Pieri, mais l'opposition entre algèbre positionnelle et calcul de l'extension.
Mais ce qui légitime véritablement le rapprochement entre les positions de 1898-1899 et celle de 1900-1903, c'est le fait que, même si les théories diffèrent considérablement, le couple de concepts fondamentaux qui les structure demeure le même. Comme nous allons le voir, l'approche de Pieri est entièrement fondée sur la construction de Staudt et la relation d'incidence ; celle, développée en 1894 par Peano, admet comme seule indéfinissable la relation ternaire « entre »[105]. Au niveau de l'analyse philosophique, il y a bien une continuité entre les deux périodes : ici comme là, le genre « géométrie non métrique » se décompose en deux espèces, caractérisées par les mêmes concepts fondamentaux. La rencontre avec l'école italienne, si elle rend immédiatement caduques et anachroniques les courageuses tentatives mathématiques russelliennes, ne bouleverse pas fondamentalement l'analyse qui les sous-tendait. Tout se passe au contraire comme si la réception des œuvres de Pieri et de Peano permettaient à Russell de résoudre les tensions qui minaient sa propre réflexion. Jugées à l'aune des *Principles*, les difficultés antérieures ne provenaient ni du fait que Russell poursuivait deux voies de recherches différentes (Russell [1903] montre qu'aucune des deux voies n'est une impasse), ni du fait qu'il refusait toute synthèse entre les deux (Russell, en 1903, continue à penser que la géométrie non métrique est double) – mais simplement du fait que le philosophe n'avait pas su développer les outils mathématiques pour aller jusqu'au bout des pistes philosophiques qu'il explorait.

Géométrie projective et géométrie descriptive dans les Principles : le chapitre 45

Le chapitre 45 de Russell [1903] constitue une reprise de l'article de Pieri *I Pincipii della Geometria di Posizione composti in sistema logico deduttivo* (1898). Après avoir énoncé (ce que l'on appellerait aujourd'hui) les axiomes d'incidence de la géométrie projective [Russell 1903, p. 383-384], Russell s'attache [*Ibid.* p. 384-385] à démontrer le théorème d'unicité de la construction du quadrilatère. Il note que la démonstration repose sur le théorème de Desargues, qui ne peut être prouvé que si l'on plonge le plan dans un espace à trois dimensions. Jusque là rien que de très banal ; même si la terminologie diffère, le cadre reste celui de *Sur les axiomes de la géométrie*. Russell annonce ensuite que l'on peut poursuivre l'exposition selon deux directions : la première, celle empruntée pour la première fois par Pieri, prend appui sur le concept d'involution ; la seconde, plus classique mais menant à une impasse, est celle, reposant sur le concept de système harmonique, suivie par Staudt.
La nouveauté de Pieri [1898] réside dans le fait que le géomètre italien dérive l'ordre sur la droite projective du seul rapport anharmonique (définit lui-même par la construction du quadrilatère) – c'est-à-dire des seules relations d'incidence dans le plan. Comme le dit Russell ($xH_{ab}y$ signifie x est le conjugué harmonique de y relativement à a et b) [1903, p. 385] :

> Si quatre points x, y, x', y' sont donnés, il peut ou ne pas arriver qu'il y ait deux points a, b tels que $xH_{ab}y$ et $x'H_{ab}y'$. La possibilité de trouver de tels points a, b constitue une certaine relation de x, y à x', y'. […] Pieri a montré comment, avec l'aide de certains axiomes, cette relation entre quatre termes peut être utilisée pour diviser la droite, relativement à n'importe quelle paire de points, en deux segments, et engendrer un ordre sur tous les points de la droite.[106]

[105] Voir par exemple, cet extrait de [Russell 1903, p. 382] : « C'est sur la façon de concevoir la ligne droite que les trois grandes géométries [projective, descriptive et métrique] commencent à diverger. La Géométrie *Projective* débute avec la ligne droite complète, *i. e.* elle affirme que n'importe quel couple de points détermine une certaine classe de points qui est aussi déterminée par n'importe quelle autre paire de la classe. Si cette classe est déterminée par la relation entre deux points, alors cette relation est symétrique. Ce que je nomme Géométrie *Descriptive*, au contraire, débute avec une relation asymétrique, ou une ligne dotée d'un sens, que l'on peut nommer un rayon ; ou on peut encore la faire débuter en considérant que deux points déterminent un intervalle de points entre eux. »

[106] « If four points x, y, x', y' be given, it may or may not happen that there exist two points a, b such that $xH_{ab}y$ and $x'H_{ab}y'$. The possibility of finding such points a, b constitutes a certain relation of x, y to x', y'. [...] Pieri has shown how, by means of

Le géomètre italien stipule que deux paires de points ne se séparent pas entre elles si et seulement si il existe deux points par rapport auxquels les deux paires sont conjuguées harmoniques – dit autrement, un point *y* appartient au segment (*abc*)[107] si et seulement il existe deux points par rapport auxquels *y* et *b*, et *a* et *c*, sont conjugués harmoniques. Pour que le symbole défini aient toutes les propriétés de la relation de séparation, il est nécessaire de poser trois axiomes supplémentaires[108], qui ne portent cependant qu'en apparence sur des concepts ordinaux ; grâce à la définition, il est possible d'éliminer toute référence au segment, et d'en revenir à la seule relation d'incidence. En ne considérant que la manière dont les droites se coupent dans le plan et en posant des contraintes sur leur façon de se croiser, Pieri montre donc qu'il est possible d'ordonner les points sur une droite quelconque. Muni du concept ordinal de segment, le géomètre peut ensuite énoncer un axiome de continuité directement adapté de Dedekind. Russell en reprend la formulation [1903, p. 387] :

> Si un segment quelconque (*abc*) est divisé en deux parties *h* et *k*, telles que, en relation à l'ordre *abc*, chaque point de *h* précède chaque point de *k*, *h* et *k* n'étant pas vide, alors il doit exister dans (*abc*) au moins un point *x* tel que chaque point de (*abc*) qui précède *x* appartient à *h*, et chaque point de (*abc*) qui suit *x* appartient à *k*.[109]

Le théorème fondamental de la géométrie projective se déduit à partir de là sans difficulté.

Au vu de ce que nous venons de dire, il pourrait sembler que la différence entre le système de Pieri et l'approche plus classique, héritée de Hilbert, distinguant le groupe des axiomes d'incidence et le groupe des axiomes d'ordre au sein de l'axiomatique de la géométrie projective, est très mince. N'y a-t-il pas explicitement des considérations ordinales chez Pieri ? En réalité, la démarche du géomètre italien s'oppose frontalement à celle standard depuis Hilbert. La présentation en groupe d'axiomes permet de délimiter ceux des postulats qui façonnent le contenu d'un concept particulier (l'incidence, l'ordre, la congruence, etc…). La relation de séparation sur une forme de première espèce est ainsi, par exemple, définie par le groupe des axiomes d'ordre. Hilbert, dans son célèbre ouvrage [1899], considère même que cette séparation des postulats en différents ensembles permet d'exprimer, au sein du système axiomatique, les types différents d'intuitions fondamentales en géométrie (les intuitions liées à l'incidence, à l'ordre, à la congruence, …)[110]. Dans une présentation de ce genre, le lecteur n'est pas perdu ; il identifie très naturellement sur quoi portent tel ou tel groupe d'axiomes.

Au contraire, dans l'approche de Pieri, c'est un même mouvement d'axiomatisation qui systématise à la fois relation d'incidence et relation d'ordre. Il est ainsi tout à fait possible, chez Pieri, d'éliminer des énoncés contenant le mot « segment » (notamment des trois axiomes d'ordre et du postulat de continuité) toute référence à la notion, en substituant systématiquement au terme la définition par les conjugués harmoniques. Les symboles ordinaux ne sont donc en réalité pour le géomètre que des commodités d'écriture. On peut les éliminer de toute thèse projective « ordinale » au prix d'une simple complication dans les expressions, indifférente du point de vue logique[111]. Certes, Pieri ajoute aux axiomes

---

certain axioms, this relation of four terms may be used to divide the straight line into the two segments with respect to any two of its points, and to generate an order of all the points on a line. »

[107] Pieri dans son [1898] ne définit pas directement la relation de séparation, mais la notion de segment sur la droite. Soient trois points *a*, *b*, *c* ; le segment (*abc*) (de tous les points entre *a* et *c*, lorsqu'on passe de *a* à *c* en croisant *b*) est l'ensemble des points *y* tels que *y* et *b* ne sont pas séparés par *a* et *c*. Voir [Pieri 1898, p. 24-29].

[108] Les trois axiomes, tels qu'énoncés par Russell dans [1903 p. 386], sont : 1- si *d* appartient à la droite *ab*, mais pas au segment (*abc*), et ne coïncide ni avec *a* ni avec *b*, alors *d* appartient à (*bca*) ; 2- si *a*, *b* et *c* sont colinéaires, et si *d* appartient (*bca*) et (*cab*), alors *d* ne peut pas appartenir à (*abc*) ; 3- si *a*, *b*, et *c* sont colinéaires, et *d* appartient à (*abc*) et est différent de *b*, et si *e* appartient à (*adc*), alors *e* est un point de (*abc*).

[109] « If any segment (*abc*) be divided into two parts *h* and *k*, such that, with regard to the order *abc*, every point of *h* precedes every point of *k*, while *h* and *k* each contain at least one point, then there must be in (*abc*) at least one point *x* such that every point of (*abc*) which precedes *x* belong to *h*, and every point of (*abc*) which follows *x* belongs to *k*. »

[110] [Hilbert 1899, p. 11] : « On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes ; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition. »

[111] Après avoir remarqué que si *ab* et *cd* sont deux paires de points colinéaires qui ne se séparent pas, il existe deux points *m* et *n* tels que (en notation russellienne) $aH_{mn}b$ et $cH_{mn}d$, Coxeter [1949, p. 33] commente : « Le théorème [précédent] est spécialement important puisqu'il nous permet de définir la séparation en terme d'incidence, au lieu de considérer la

considérés habituellement comme faisant partie du groupe d'incidence de nouveaux postulats (quatre, en comptant l'axiome de continuité) ; mais ces axiomes portent tous sur la façon dont point, droite et plan se croisent dans l'espace (c'est-à-dire sur les relations d'incidence), et non sur une nouvelle relation indéfinissable. Les frontières entre groupes d'axiomes sont donc poreuses chez Pieri – plus radicalement, il n'y a pas chez lui de « groupe » d'axiomes et en conséquence pas de frontière entre « groupes », parce qu'une seule relation fondamentale suffit pour développer l'ensemble de la géométrie projective. A une approche statique, qui juxtapose différents groupes comme l'on juxtapose différents types d'*Anschauung*, Pieri oppose une approche dynamique[112], qui bouscule les délimitations héritées de l'intuition, en exploitant au maximum les ressources d'une langue logique quantifiée[113]. Dans le système de Pieri (mais aussi dans celui de Peano), la langue logique est le seul principe structurant, et tout ce qui peut être défini dans le langage doit l'être. La différence entre Pieri et Hilbert sur le statut des notions ordinales n'est donc pas minime ; elle est même d'une importance cruciale puisqu'elle engage rien de moins que la question des rapports entre axiomatisation et intuition[114].

C'est incontestablement à la dimension dynamique de la démarche du géomètre italien que Russell a été sensible. L'œuvre de Pieri le convainc de la possibilité de définir l'ordre à partir de l'incidence. A l'intérieur d'un cadre où la construction du quadrilatère reste la seule fondamentale, il est possible d'ordonner la droite projective, donc de formuler un axiome de continuité et de compléter le programme de Staudt. Russell se montre très lucide dans son analyse de l'évolution de la géométrie projective [1903 p. 421] :

> Le véritable fondateur de la Géométrie non-quantitative est von Staudt. C'est lui qui a introduit la définition de la série harmonique par le moyen de la construction du quadrilatère, et qui a rendu possible, par la répétition de cette construction, la définition projective de tous les rapports anharmoniques rationnels. […] Mais il restait une dernière étape à parcourir avant que la Géométrie projective puisse être considérée comme complète, et c'est Pieri qui l'a parcourue. Dans la conception de Klein, la question de savoir si *tous* les ensembles de quatre points colinéaires ont un rapport anharmonique (celle de savoir si on peut assigner une signification aux rapports anharmoniques irrationnels) reste ouverte. Pour la résoudre, nous avons besoin d'une méthode permettant d'engendrer un ordre sur *tous* les points de la ligne. […] Il n'y a, bien entendu, aucune raison projective de supposer l'existence de tels points [dont le rapport anharmonique est irrationnel] ; mais il y a des raisons métriques de le faire ; et dans tous les cas, il est bon de pouvoir traiter projectivement, si c'est possible, un espace continu. C'est ce que Pieri a réalisé, à l'aide de nouveaux axiomes, mais sans nouveaux indéfinissables. Ainsi, s'est finalement achevé le long processus par lequel la Géométrie projective s'est purifiée elle-même de toute souillure métrique.[115]

---

séparation comme une seconde relation non définie. […] Cette idée est due à Pieri [qui] réduisait ainsi les relations non définies à la seule relation d'incidence, et les axiomes d'ordre [aux trois postulats énoncés note 108]. D'un autre coté, cette simplification est dans une certaine mesure illusoire, car ces axiomes seraient très compliqués si nous les exprimions directement en terme d'incidence. Or, quel est le bon choix : un nombre d'axiomes simples contenant deux relations non définies, ou un nombre plus restreint d'axiomes plus compliqués contenant seulement une seule relation ? La réponse est affaire de goût. » La simplicité selon Pieri doit être évalué à l'aune du langage enrégimenté ; son système est plus simple que celui de Hilbert parce qu'il nécessite moins de terme relationnel extra-logique.

[112] Nous reprenons cette opposition statique / dynamique à Marchisotto [1995]. Pour une analyse plus générale des différences entre Hilbert et l'école italienne, voir [Brigaglia et alii 2002].

[113] La définition de la relation d'ordre est de ce point de vue assez complexe puisqu'elle possède une structure de type $\forall\forall\forall\forall\exists\exists$: $\forall x \forall y \forall x' \forall y' ((x, y)$ ne sépare pas $(x', y') \Leftrightarrow \exists z \exists z' (x H_{zz'} y \wedge x' H_{zz'} y'))$

[114] Nous ne voulons pas dire que l'intuition dote chez Hilbert les termes géométriques d'une signification ; les concepts extra-logiques sont bien entendu « définis implicitement » chez lui comme chez Pieri (voir sur ce point *infra*.) et sont de ce fait coupés de toute référence directe à une intuition. Mais le groupe d'axiomes dégage l'ensemble des postulats engagés dans la définition d'un concept fondamental ; alors que c'est le système axiomatique, dans son ensemble, qui définit simultanément les relations de base chez Pieri. Il y a un niveau intermédiaire, « local », entre l'axiome et l'axiomatique dans l'exposé hilbertien, permettant une saisie en négatif de la place des différentes intuitions ; on ne trouve aucun équivalent de ce niveau intermédiaire chez Pieri.

[115] « The true founder of non-quantitative Geometry is von Staudt. It was he who introduced the definition of a harmonic range by means of the quadrilateral construction, and who rendered it possible, by repetitions of this construction, to give projective definitions of all rational anharmonic ratios. [...] But there remained one further step, before projective Geometry could be considered complete, and this step was taken by Pieri. In Klein's account, it remains doubtful whether *all* sets of

L'analyse de Pieri, comme celle de Russell en 1899, se fonde uniquement sur l'interprétation du rapport harmonique en terme de construction du quadrilatère (en terme de relation d'incidence). Mais, en définissant à l'intérieur de ce cadre très étroit une relation ordinale de séparation, Pieri permet d'achever un programme que personne avant lui n'avait su mener jusqu'à son terme[116].

Géométrie projective et géométrie descriptive dans les Principles : le chapitre 46

Nous serons bref sur le contenu du chapitre 46, dans lequel Russell développe, en reprenant l'œuvre de Pasch (revue par Peano), la géométrie projective à partir de la notion de point et de la seule relation « entre ». Russell explique en préambule que la géométrie exposée n'est pas purement projective dans la mesure où la relation d'ordre qui y est considérée comme fondamentale n'est pas un invariant projectif [1903, p. 393]. Après avoir développé axiomatiquement la théorie descriptive (§§374-381), il montre cependant, toujours en suivant Pasch et Peano, qu'une construction de l'espace projectif est possible dans ce système (§§382-387).

Le point sur lequel nous voudrions insister est l'inversion de perspective opérée par Russell. Au lieu de définir, comme dans l'axiomatique de Pieri, la relation d'ordre à partir de la relation d'incidence, il dérive, dans le chapitre 46, les relations d'incidence des rapports ordinaux entre formations géométriques.

Ainsi, la droite (*ab*) est définie comme l'union de trois ensembles : les points entre *a* et *b* (*a* et *b* compris), les points tels que *b* est entre *a* et eux (*a'b*)[117] et les points tels que *a* est entre *b* et eux (*b'a*). Russell, suivant Peano[118], définit ensuite le plan de la manière suivante : *a*, *b*, *c* étant trois points non colinéaires, le plan *abc* est l'union des droites (*ab*), (*bc*), (*ca*), du triangle *abc* (l'ensemble des points entre n'importe quel point des cotés du triangle), de *a'bc* (l'ensemble des points *y* tels qu'un point quelconque entre *b* et *c* est entre *y* et *a*), *b'ca*, *c'ab*, et de *b'c'a* (l'ensemble des points *y* tels qu'un point quelconque *x* tel que *a* est entre *x* et *c* est entre *y* et *b*), *c'a'b*, *a'b'c*[119]. On mesure sur ce dernier exemple à quel point diffèrent les approches projective et descriptive. En géométrie projective, le plan *abc* est défini très simplement comme l'ensemble des points appartenant aux droites du faisceau de sommet *c* coupant la droite *ab*. Selon cette définition, toutes les droites coplanaires se croisent. Dans l'approche descriptive, ce n'est pas nécessairement le cas. Comme le remarque Russell [1903, p. 399], « à la place de la proposition selon laquelle deux droites coplanaires quelconques se croisent, nous avons [en géométrie descriptive] une proposition plus compliquée, à savoir : si *a*, *b*, *c*, *d* sont des points coplanaires non trois par trois colinéaires, alors soit les droites *ab*, *cd* se croisent, soit *ac*, *bd* le font, soit *ad*, *bc* le font ». Whitehead prouve même le résultat plus

four collinear points have an anharmonic ratio, and whether any meaning can be assigned to irrational anharmonic ratios. For this purpose, we require a method of generating order among *all* the points of a line. [...] There is, of course, no projective reason for supposing that there are such points ; but there are metrical reasons, and in any case it is well, if possible, to be able to deal projectively with a continuous space. This is effected by Pieri, with the help of certain new axioms, but without any new indefinables. Thus at last the long process by which projective Geometry has purified itself has purified itself from every metrical taint is completed. » Remarquons que Russell continue à penser qu'« il n'y a, aucune raison projective de supposer l'existence de tels points ». Il ne semble toujours pas réaliser que le théorème fondamental de la géométrie projective, le théorème de Pascal, etc… ne peuvent être démontrés sans l'axiome de continuité.

[116] La définition de Pieri ne va pas sans poser une difficulté, qui touche à l'indépendance de l'axiome de continuité. Dans un plan « rationnel » (dans un plan où seuls les points qui ont des coordonnées rationnels existent), il n'est pas possible d'introduire une relation de séparation à la façon de Pieri ; il n'y a pas, dans ce modèle, « assez » de paires de points pour faire correspondre à deux paires qui ne se séparent pas une troisième paire par rapport à laquelle les deux premières sont conjuguées harmoniques. Whitehead commet l'erreur dans son premier traité [1906] ; il la corrige dans son second [1907, p. 14].

[117] Peano [1894] explique que le signe « ' » dans *a'bc* est l'« ombre » du segment *bc* lorsque le plan est illuminé en *a*.

[118] Comme le remarque [Russell 1903, p. 398], une telle définition ne se trouve pas chez Pasch, chez qui le plan est un nouvel indéfinissable ; voir [Pasch 1882, p. 19-20].

[119] Voir [Russell 1903, p. 398].

fort selon lequel dans l'axiomatique de Peano dotée d'un postulat de continuité, il existe au moins une droite coplanaire à une droite donnée D ne coupant pas D[120]. La preuve de ce théorème est caractéristique de la démarche descriptive : à partir de la définition purement ordinale du plan et de la droite, on déduit un résultat sur la façon dont les droites coplanaires se coupent[121]. Alors qu'en géométrie projective, on part d'hypothèses sur les relations d'incidence entre formes pour en conclure quelque chose quant à leur ordre, on fait l'inverse en géométrie descriptive.

Malgré les profondes différences, formelles et substantielles, entre les deux théories, Russell explique dans un deuxième temps, en reprenant la construction classique de Pasch[122], comment l'on peut, en modifiant l'interprétation des termes « point », « droite », « plan », modifier l'espace descriptif de façon à lui appliquer l'axiomatique de la géométrie projective[123]. Le cœur du raisonnement est la redéfinition de la notion de gerbe de droites :

> Soient l et m deux droites dans un plan, et A un point quelconque n'appartenant pas à ce plan. Les plans Al et Am ont alors une droite en commun. La classe de ces droites, pour tout point A hors du plan lm, a les propriétés [voulues], et le terme de gerbe [*sheaf*] est étendu à toutes les classes de droites ainsi définies. Il est évident que si l, m se croisent, la gerbe a un sommet ; si elles ne se croisent pas, il n'en a pas. Ainsi, dans l'espace euclidien, toutes les droites parallèles à une droite donnée forment une gerbe qui n'a pas de sommet. Lorsque notre gerbe n'a aucun sommet, nous définissons un *point idéal* par le biais de la gerbe. [Russell 1903, p. 401][124]

En considérant que « point » désigne à la fois les points authentiques de l'espace descriptif (les sommets des gerbes « descriptives ») et les points idéaux (les ensembles de droites déterminées par deux droites coplanaires qui ne se croisent pas), et en ajustant à cette interprétation celles des mots « droite » et « plan », on démontre que l'ensemble des axiomes projectifs sont satisfaits [*Ibid.*, p. 402-403]. La totalité de la géométrie de position peut donc, à l'aide de ce procédé de construction, être rigoureusement développée à partir du concept de point et la relation d'ordre « entre ».

L'approche développée au chapitre 46, rapidement décrite ici, peut paraître encore plus éloignée des recherches poursuivies par Russell en 1898-1899 que l'approche, fondée sur l'œuvre de Pieri, développée au chapitre 45. Ce n'est vrai qu'en partie. Outre le fait que la notion de série est fondamentale en géométrie descriptive comme dans l'analyse russellienne des multiplicités positionnelles, la question de la relation entre ordre ouvert et ordre clos, au cœur de l'analyse de Pasch, joue un rôle crucial dans la discussion des séries multidimensionnelles[125]. Le fait que les deux disciplines soient fondées sur des considérations ordinales conduit, ici et là, à soulever le même type de problème. Surtout, comme nous l'avons déjà noté, l'opposition entre une géométrie fondée sur l'ordre et une géométrie fondée sur l'incidence reste stable, et ce malgré la différence réelle des développements mathématiques au cours des deux périodes[126].

---

[120] [Whitehead 1907, p. 11].

[121] La géométrie descriptive continue constitue donc la partie commune aux géométries euclidienne et hyperbolique ; elle correspond à ce que Bolyai nommait géométrie absolue ; sur ce point, voir [Coxeter 1947, p. 16-19].

[122] [Pasch 1882, p. 40-67].

[123] Voir [Russell 1903, p. 399].

[124] « Let l, m be any two lines in one plane, A any point not in this plane. Then the planes Al, Am have a line in common. The class of such lines, for all possible points A outside the plane lm, has the properties above alluded to, and the word sheaf is extended to all classes of lines so defined. It is plain that if l, m intersect, the sheaf has a vertex ; if not, it has none. Thus, in Euclidean space, all the lines paralell to a given line form a sheaf which has no vertex. When our sheaf has no vertex, we define an *ideal point* by means of the sheaf. »

[125] Lorsque le jeune philosophe discute en 1898 des rapports entre série angulaire et série linéaire, il souligne à plusieurs reprises les difficultés engendrées par l'introduction d'une corrélation entre droite ponctuelle et faisceau de droites dans le cadre euclidien ou hyperbolique. Voir notamment [Russell 1899a, p. 381-383] et [Russell 1899b, p. 458].

[126] Une des différences majeures entre les développements consacrés aux multiplicités positionnelles (1899) et ceux consacrés à la géométrie descriptive (1903) tient à la conception de l'ordre. Dans l'analyse russellienne des multiplicités positionnelles, la notion de série n'est pas encore, comme on l'a déjà souligné, liée à celle de relation. Au contraire, dans l'approche de Pasch, l'ordre est immédiatement défini à partir de la relation ternaire « entre ». La reprise de [Pasch 1882] en

L'objet de la géométrie

La description du contenu des deux chapitres des *Principles* consacrés à la géométrie non quantitative confirme le diagnostic posé lors de l'analyse des développements russelliens de la période antérieure : la géométrie qualitative, qui désignait une discipline unifiée selon Russell [1897a], se divise en deux sous-disciplines différentes, fondée sur la relation d'incidence pour l'une, sur la relation d'ordre pour l'autre. Cette division ne remet toutefois plus en question la distinction plus générale et fondamentale entre géométrie non quantitative et géométrie métrique. Que l'on parte du concept d'incidence ou du concept d'ordre, il est, en 1903, possible de dériver rigoureusement, sans aucun ajout extérieur, la totalité de l'édifice projectif. Pieri et Peano donnent à Russell les moyens de transformer la juxtaposition conflictuelle entre deux approches concurrentes en une combinaison apaisée de deux points de vue complémentaires. La question de savoir si la géométrie non quantitative est une théorie de l'incidence ou une théorie de l'ordre n'est plus mathématiquement cruciale : la totalité de la géométrie pure peut être développée dans les deux cadres.

Si le problème mathématique est réglé, la question philosophique, elle, demeure. Russell n'accorde pas la même valeur aux deux présentations. L'auteur des *Principles* continue de privilégier le point de vue projectif, fondé sur les relations d'incidence et la construction du quadrilatère, à une théorie basée sur l'ordre[127]. Mieux, le philosophe justifie à présent son choix par des considérations relatives à l'objet de la géométrie. Ainsi, dans le chapitre 44 qui ouvre la partie VI des *Principles*, Russell définit l'espace comme une série multidimensionnelle[128]. Cela signifie que la notion pure de série, fondamentale dans l'étude du continu développée dans le livre V, n'a rien d'intrinsèquement spatial. C'est seulement la présence de plusieurs (au moins deux) dimensions, ou encore la possibilité pour les séries de se croiser, qui, pour Russell, constitue la nature propre de l'espace et fonde la transition entre analyse et géométrie[129]. Dit autrement, toute axiomatique géométrique contient minimalement, selon la définition russellienne, une théorie de l'incidence (un ensemble d'énoncés décrivant comment différentes séries se croisent les unes avec les autres). Le privilège accordé à l'approche projective, fondée sur la seule construction du quadrilatère, provient directement de cette définition : la géométrie de position, à la Staudt, est pure en ce qu'elle ajuste ses méthodes à son objet, l'espace conçu comme une structure multidimensionnelle. Russell retrouve ici (par un autre biais[130]) l'idée dont il était parti en 1897 : en tant que théorie pure de l'incidence, la géométrie projective peut être considérée comme une « métagéométrie », c'est-à-dire comme le noyau de toute théorie de l'espace en tant qu'espace.

Peut-être échaudé par les critiques que lui avait adressées Poincaré, Russell reste néanmoins dans les *Principles* extrêmement prudent. Le lien entre géométrie projective et série

---

1903 s'ajuste parfaitement à la logique des relations (voir sur ce point la partie IV des *Principles*), encore non développée en 1899.

[127] C'est ainsi à Pieri, non à Pasch, que Russell, dans l'extrait cité plus haut [1903, p. 421], décerne l'honneur d'avoir achevé l'édifice de la géométrie non quantitative commencée par Staudt.

[128] [Russell 1903, p. 372] : « Cet élément [commun à toutes les axiomatiques géométriques] peut être complètement résumé dans la formule suivante : la géométrie porte sur des séries à plus d'une dimension. La question de la nature des termes [contenus dans] ces séries n'est pas pertinente en géométrie, où on examine seulement les conséquences des relations postulées entre les termes. Ces relations sont toujours propres à engendrer des séries de plus d'une dimension, mais n'ont, autant que je puisse en juger, aucun autre point général en commun. »

[129] La définition russellienne est proche de la définition que donne Poincaré [1902, p. 60] dans lequel l'espace est aussi lié à la multidimensionalité. Mais le concept de dimension manipulée par le mathématicien français est déjà topologique, ce qui n'est pas du tout le cas du concept russellien.

[130] En 1897, le caractère « général » de la géométrie projective est, en 1897, fondé sur la méthode de Cayley-Klein ; voir *supra*.

multidimensionnelle n'est explicitement évoqué, à la fin du chapitre 45, que comme une conjecture [Russell 1903, p. 392] :

> Il semblerait (bien que ce ne soit qu'une conjecture) que la Géométrie projective n'emploie que le plus petit nombre d'axiomes permettant d'engendrer une série à plus de deux dimensions, et que la dualité projective découle de la notion de dimension en général. Les autres espaces ont d'autres propriétés que celles requises pour en faire des séries *n*-dimensionnelles, et dans les autres espaces, la dualité est en conséquence sujette à différentes limitations.[131]

Dans *The axioms of projective geometry* (1906), Whitehead, abandonne toute réserve et donne une force et une portée beaucoup plus grande à l'idée russellienne. Voilà comment il caractérise la géométrie dans la préface de son opuscule :

> La géométrie, au sens le plus large où ce terme est utilisé par les mathématiciens aujourd'hui, est un département de ce qui, en un certain sens, peut être appelé la science générale de la classification. Cette science générale peut être ainsi définie : étant donné un ensemble *K* quelconque d'entités, les sous-ensembles de *K* forment un nouvel ensemble d'ensembles ; la science de la classification est l'étude des classes d'ensembles sélectionnées dans ce nouvel ensemble de façon à posséder certaines propriétés pré-établies. Par exemple, dans la branche traditionnelle aristotélicienne de la classification en espèce et en genre, les ensembles sélectionnés dans l'ensemble des sous-ensembles de *K* (1) doivent être mutuellement exclusifs, et (2) épuiser *K* ; les sous-ensembles de cet ensemble sont les genres de *K* ; de même, chaque genre doit être classé selon la règle précédente, les genres des divers genres de *K* étant appelé espèces de *K* ; et ainsi de suite pour les sous-espèces, etc. L'importance de ce processus de classification est évident, et a été suffisamment soulignée par les auteurs de logique. […]
>
> La géométrie est la science des classifications croisées [*cross classification*]. La classe fondamentale *K* est la classe des points ; les ensembles sélectionnés des sous-ensembles de *K* est la classe des lignes droites. Cette classe de sous-ensembles est telle qu'une paire quelconque de points réside sur une et une seule droite, et qu'une droite quelconque possède au moins trois points. Ces propriétés des lignes droites représentent les propriétés qui sont communes à toutes les branches de la science [géométrique], lorsque les géométries modernes avec un nombre fini de points sont prises en compte. [Whitehead 1906, p. 4-5][132]

Comme Russell dans le chapitre 44, Whitehead cherche ici à préciser l'objet et la nature de la géométrie. Son approche est cependant plus abstraite que celle de son ancien élève. La géométrie est définie par lui comme l'étude d'un type de classification particulier, les classifications croisées, qui s'oppose au type logique ou aristotélicien. Dans les classifications logiques, les éléments classés ne peuvent pas appartenir à plusieurs ensembles ; dans les classifications géométriques ou croisées, ce n'est plus le cas : de même qu'un point d'un plan est sur plusieurs droites, de même un élément d'une *cross classification* appartient à plusieurs classes. Dans la suite des deux traités, Whitehead nomme « axiome de classification » précisément l'ensemble des postulats relevant du groupe des axiomes d'incidence. C'est donc, exactement comme chez Russell, la possibilité pour différentes classes ou séries de se croiser qui caractérise l'objet de la géométrie. L'espace, chez Whitehead comme chez Russell, n'est

---

[131] « It would seem (though this is only a conjecture) that projective Geometry employs the smallest number of axioms from which it is possible to generate a series of more than two dimensions, and that projective duality therefore flows from that of dimensions in general. Other spaces have properties additional to those required to make them n-dimensional series, and in other spaces, accordingly, duality is liable to various limitations ». Voir également [*Ibid.* p. 374]. Pour comprendre la référence à la dualité, voir *supra.* ce que l'on a dit à propos du rapport entre dualité et produit mixte.

[132] « Geometry, in the widest sense in which it is used by modern mathematicians, is a departement of what in a certain sense may be called the general science of classification. This general science may be defined thus : given any class of entities K, the subclasses of K form a new class of classes, the science of classification is the study of sets of classes selected from this new class so as to posses certain assigned properties. For example, in the traditional Aristotelian branch of classification by species and genera, the selected set from the class of subclasses of K are (1) to be mutually exclusive, and (2) to exhaust K; the subclasses of this set are the genera of K; then each genus is to be classified according to the above rule, the genera of the various genera of K being called the various species of K; and so on for subspecies, etc. The importance of this process of classification is obvious, and is sufficiently emphasized by writers on Logic. [...]
Geometry is the science of cross classification. The fundamental class K, is the class of points; the selected set of subclass of K is the class of (straight) lines. This set of subclasses is to be such that any two points lie on one and only one line, and that any line possesses at least three points. These properties of straight lines represent the properties which are common to all branches of the science which usage terms Geometrical, when the modern Geometries with finite numbers of points are taken account of. »

pas conçu comme une structure d'ordre, mais comme une structure d'incidence[133]. Et de cette commune définition, les deux philosophes tirent la même conséquence : c'est seulement en tant que science de la *cross classification* que la géométrie projective occupe une place centrale au sein des théories de l'espace. Citons Whitehead [1906, p. 5] :

> Dans la géométrie projective, le sujet, conçu simplement comme une étude de classification, a un grand intérêt. Ainsi, dans [ses] parties fondamentales, on mettra l'accent sur cette approche, en différant l'introduction de la notion d'ordre. Une démarche opposée est adoptée en géométrie descriptive car la partie purement classificatoire du sujet est peu maniable et inintéressante.[134]

The axioms of projective geometry (1906) généralise ainsi le schéma de pensée proposé dans les *Principles* (1903) : Whitehead comme Russell identifie l'espace a un type de classification (les classifications croisées ou structures d'incidence), et développe sur cette base une approche fondationaliste de la géométrie projective, conçue comme une théorie de l'espace pur.

Ainsi, chez les deux philosophes, la géométrie est encore définie comme la science de l'espace (la partie VI des *Principles* s'intitule d'ailleurs « *Space* »). Le point est important parce qu'il permet de contester l'affirmation très répandue[135] selon laquelle, dans les *Principles*, Russell développerait une approche axiomatique, « hilbertienne », de la géométrie. Loin de ne concevoir l'espace que comme un modèle possible de systèmes de postulat librement posés par le mathématicien (loin de couper le lien entre géométrie et espace[136]), l'effort « pré-hilbertien » de Russell consiste au contraire à offrir une définition de l'espace permettant à la fois de distinguer la géométrie des autres disciplines mathématiques, et de manifester la commune nature de toutes les théories possibles de l'espace. Le philosophe, perpétuant la tradition inaugurée par Staudt, croit reconnaître dans les structures d'incidence le propre du géométrique, et définit l'espace en conséquence. Contrairement à Hilbert, Russell conçoit donc « naïvement » la géométrie comme une théorie décrivant un type (non empirique) de réalité (non comme un système de définitions implicites). De ce point de vue, la partie VI des *Principles* ne constitue pas une exception par rapport au reste de l'œuvre. De même que l'arithmétique porte sur le nombre entier défini comme ensemble d'ensemble, de même, selon Russell, la géométrie porte sur l'espace défini comme structure d'incidence. Et le philosophe aurait pu objecter à l'approche hilbertienne ce qu'il a objecté à l'analyse des nombres naturels développée par Peano. La définition axiomatique des entiers à partir des indéfinissables « 0 » et « successeur », explique Russell dans la partie II des *Principles*[137], ne caractérise pas univoquement les nombres naturels, et ne peut, pour cette raison, être acceptée.

---

133 Il nous paraît possible de rapprocher la pensée de Whitehead et Russell de ce que l'on appelle parfois géométrie de l'incidence [Buekenhout 1995]. Le concept fondamental est dans cette approche celui de structure d'incidence ; $P = \{S, O, I\}$ est une structure d'incidence si et seulement si $S \cap O = \varnothing$ et si $I \subseteq S \times O$. Un élément de S s'appelle un « point » ; un élément de O, un « block » ; un élément de I, un « flag ». Par exemple, les « points » peuvent être des points du plan projectif ; les « blocks » être des droites (des ensembles particuliers de points) ; et les « flags » décrivent les relations d'appartenance entre points et droites. Sur les géométries finies et les géométries de l'incidence, voir [Dembrowski 1968 p. 1-8] et [Buekenhout 1995 p. 3-25]. La référence aux « géométries modernes avec un nombre fini de points » montre que le rapprochement effectué ici n'est pas artificiel. Nous tenons à remercier Labib Haddad, qui nous a signalé les similarités entre ce courant de recherche très vivant aujourd'hui et l'approche de Whitehead et Russell.

134 « In Projective Geometry the subject viewed simply as a study of classification has great interest. Thus in the foundations of the subject this conception is emphasized, while the introduction of 'order' is deferred. The opposite course is taken in Descriptive Geometry since the purely classificatory part of the subject is clumsy and uninteresting. »

135 Voir par exemple, [Byrd 1999, p. 49].

136 Sur cette formulation, voir [Toretti 1978, p. 188-199] (par exemple, p. 190 : « [Pour Hilbert] les plans, les droites et les points de ses *Grundlagen* peuvent désigner n'importe quelle trio de choses – Hilbert proposa une fois chaises, tables et chopes de bière – qui, étant donnée une interprétation appropriée des propriétés non définies d'incidence, d'ordre et de congruence, se trouve posséder les relations caractérisées par ces axiomes. Le domaine sur lequel portent les axiomes et les théorèmes que l'on en dérive est l'ensemble des relations dans lesquels les points, les droites et les plans sont pris, et non pas la nature individuelle des points, des droites et des plans eux-mêmes. Ce qui importe est le type de ces relations en tant que telles, et non pas les traits idiosyncrasiques dont elles pourraient bénéficier du fait de la particularité des objets qu'elles relient. »)

137 Voir [Russell 1903, p. 124 sq.].

De manière encore plus spectaculaire, la définition abstraite selon laquelle l'espace n'est qu'un modèle d'une structure axiomatique librement posée brouille toute distinction entre l'objet propre de la géométrie et celui des autres sciences. Seule une définition plus « substantielle » de l'espace peut dégager ce qui constitue le propre de la géométrie. C'est dans la géométrie projective, considérée comme matrice de toute théorie possible de l'espace, que les héritiers de Staudt et de Klein que furent Russell et Whitehead ont cherché une telle définition[138].

Les analyses développées précédemment visent à exhumer un thème négligé dans les études russelliennes : celui des relations d'incidence. Le lien à la tradition de Staudt, la place centrale accordée à la construction du quadrilatère, le caractère premier des relations d'incidence constituent la plate-forme sur laquelle Russell tente de stabiliser ses diverses conceptions de l'espace et de la géométrie pendant la genèse des *Principles*. Et le concept d'ordre, pourtant central dans la théorie du continu, n'est pas géométriquement fondamental. Certes, comme nous l'avons montré dans notre section 4, il serait faux de dire que l'émergence de la notion de série ne doit rien aux considérations que Russell consacre à l'espace. Le concept de multiplicité positionnelle, que le philosophe reprend à Whitehead [1898], joue incontestablement un rôle déterminant dans sa pensée à cette époque charnière. Mais en 1903, Russell maintient l'option qui prévaut déjà en 1899 dans sa réponse à Poincaré : si les relations d'ordre sont mathématiquement fondamentales, ce sont les relations d'incidence qui sont géométriquement premières. Ne pas oublier ce point est crucial, non seulement lorsqu'on veut saisir la nature des conceptions russelliennes de la géométrie, mais aussi lorsqu'on cherche à comprendre l'économie générale de *The Principles of Mathematics* et la façon dont la partie VI s'y insère. Souligner le rôle joué par les classifications croisées pourrait également se révéler décisif eu égard à certains développements métaphysiques ultérieurs – nous pensons au monisme neutre. Russell développe à partir des années vingt une critique du dualisme matière-esprit, qu'il adosse à une critique plus générale des modes de classification aristotéliciens en genre et espèce. Une même entité sensible « neutre », explique-t-il alors, peut, selon la façon dont elle est classée, être catégorisée soit comme matérielle soit comme mentale un peu comme un même point peut, dans le plan, se trouver à l'intersection de différentes droites[139]. La ressemblance formelle entre ces thèses métaphysiques et les schémas de pensée mis en place, vingt ans plus tôt, dans la partie VI des *Principles* est extrêmement troublante. Ce lointain et inattendu écho est une preuve de plus que l'on aurait bien tort de passer sous silence l'analyse russellienne des relations d'incidence[140].

---

138 L'interprétation proposée ici va donc à l'encontre de toute une littérature qui tend à discerner deux formes de logicisme dans les *Principles* (voir [Byrd 1999] pour une exposition du problème et pour d'autres références). Selon ces commentateurs, il y aurait lieu de distinguer entre un logicisme fort, développé dans la partie II, critique vis-à-vis des définitions axiomatiques et demandant que tous les objets soient définis explicitement, d'un logicisme faible, développé dans la partie VI, se contentant d'axiomatiser les structures mathématiques étudiées et ne cherchant pas à définir explicitement les objets. Cette opposition procède selon nous d'une assimilation hâtive de la conception russellienne à l'approche hilbertienne – assimilation qui est le corrélât d'une méconnaissance de ce que Russell doit à Staudt et à Klein. Nous pensons qu'il y a au contraire une profonde unité du questionnement russellien. Il s'agit pour le philosophe, dans la partie II comme dans la partie VI, de rétablir l'objet propre des différentes théories mathématiques étudiées : les nombres entiers pour l'arithmétique ; l'espace conçu comme structure d'incidence pour la géométrie.

139 Voir notamment [Russell 1921, p. 93-107].

140 Nous élaborons l'analyse de cette ressemblance dans un article à paraître intitulé *Russell, les sense-data et les objets physiques*.

BURALI-FORTI Cesare
[1897] *Introduction à la Géométrie Différentielle, suivant la Méthode de H. Grassmann*, Paris : Gauthiers-Villars, 1897.

BUEKENHOUT Francis éd.
[1995] *Handbook of Incidence Geometry. Buildings and Foundations*, Amsterdam : Elsevers Science, 1995.

BRIGAGLIA Aldo
[1996] The influence of Grassmann on Italian projective n-dimensional Geometry, in [Schubring 1996] p. 155-164.

BRIGAGLIA Aldo, AVELLONE Maurizio, ZAPULLA Carmella
[2002] The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri, *Archive for History of Exact Sciences,* 56, 2002, p. 363-425.

BYRD Michael
[1999] Part VI of the Principles of Mathematics, in *Russell : the Journal of the B. Russell Archives*, 19, 1999, p. 29-62.

COUTURAT Louis
[1900] Etudes critiques. L'algèbre universelle de M. Whitehead, *Revue de métaphysique et de morale*, 8,1900, p. 323-362

COXETER Harold Scott MacDonald
[1949] *The Real Projective Plane*, York : Maple Press Company, 1949.
[1947] *Non-Euclidean Geometry*, seconde édition, Toronto : Toronto University Press, 1947.

CREMONA Luigi
[1885] *Elementi di geometria projettiva*, Turin, 1873 ; trad. française *Eléments de géométrie projective*, Paris : Gauthiers-Villars, 1875 ; trad. allemande *Elemente der projectivischen Geometrie*, Stuttgart : Cotta, 1882 ; cité dans la trad. anglaise *Elements of Projective Geometry*, Oxford : Clarendon Press, 1885.

DEMBOWSKI Peter
[1968] *Finite Geometries*, Berlin : Springer Verlag, 1968.

ENRIQUES Frederigo
[1898] *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologne : Zanichelli, 1898 ; trad. française par P. Laberenne de la 4ème édition *Leçons de géométrie projective*, Paris : Gauthiers-Villars, 1930.

FLAMENT (D.)
[2003] *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, Paris : CNRS édition, 2003.
[2004] H. G. Grassmann et l'introduction d'une nouvelle discipline mathématique : l'*Ausdehnungslehre*, à paraître dans *Philosophia Scientae,* n° spécial n°5, 2004.

GRASSMANN (H. G.)
[1844] *Die Lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik,*

Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert, Leipzig : Verlag von Otto Wigand, 1844 ; trad. fr. de D. Flament, Paris : Blanchard, 1994.
[1862] *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin, 1862 ; trad. anglaise de L. C. Kannenberg, Providence : American Mathematical Society, 2000.

GRATTAN-GUINNESS Ivor
[2002] Algebras, Projective Geometry, Mathematical Logic, and Constructing the Worlds : Intersections in the Philosophy of Mathematics of A. N. Whitehead, in *Historia Mathematica*, 29, 2002, p. 427-462.

GRIFFIN Nicholas
[1990] *Russell's Idealist Apprenticeship*, Oxford : Clarendon Press, 1990.

HILBERT David
[1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1899 ; trad. fr. commentée de la 10ème édition par P. Rossier, Paris : Dunod, 1971.

HYLTON Peter
[1990] *Russell, Idealism and the Emergence of Analytical Philosophy*, Oxford : Clarendon Press, 1990.

KLEIN Felix
[*Werke*] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921-1923), I-III
[1871] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, 4, 1871, cité d'après [*Werke*] 1, p. 254-305.
[1873] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, zweiter Aufsatz, *Math. Annalen*, 6, 1873, cité d'après [*Werke*] 1, p. 311-343.
[1874] Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Annalen*, 7, 1874, cité d'après [*Werke*] 1, p. 344-352.
[1909] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte ; Teil 2 Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1909, cité dans la trad. anglaise de E. R. Hedrick et C. A. Noble, New York : Dover, 1925.

KLEIN Felix et ROSEMANN Walther
[1928] *Vorlesungen über nicht euklidische Geometrie*, Berlin : J. Springer, 1928.

LELONG-FERRAND Jacqueline
[1985] *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF, 1985.

MARCHISOTTO Elena Anne
[1995] In the Shadows of Giants: The Works of Mario Pieri in the Foundations of Mathematics, *History and Philosophy of Logic*, 16, 1995, p. 107-119.

NAGEL Ernest
[1939] The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry, *Osiris*, 7, 1939, p. 142-224.

NABONNAND Philippe
[2000] La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, 2000, p. 219-269.

PASCH Moritz
[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1882 ; 2ème édition avec un supplément de Max Dehn, *Die Grundlegung der Geometrie in Historischer Entwicklung*, Berlin : Springer, 1926.

PEANO Guiseppe
[1888] *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin : Fratelli Bocca, 1888 ; trad. anglaise de L. Kannenberg, Basel : Birkhauser, 2002.
[1894] Sui Fondamenti della Geometria, *Rivista di matematica*, vol. IV, 1894, p. 51-90.

PIERI Mario
[1898] I Pincipii della Geometria di Posizione composti in sistema logico deduttivo, *Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 48, 1897-1898, p. 1-62.

POINCARE Henri
[1902] *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902 ; rééd. Paris : Flammarion, 1968.

QUINE Willard Von Orman
[1941] Whitehead and the Rise of Modern Logic, in *Selected Logic Papers*, Cambridge : Harvard University Press, 1995, p. 3-36.

RICHARDS Joan
[1988] *Mathematical Visions : the pursuit of geometry in Victorian England*, London : Academic Press, 1988.

RUSSELL Bertrand
[Papers] *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London and New-York : Routledge, 1983-?
[1896-1898] Various Notes on Mathematical Philosophy, [Papers 2], p. 6-29.
[1897a] *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press, 1897, cité dans la réédition London and New-York : Routledge, 1996 ; trad. fr. de A. Cadenat, Paris : Gauthier-Villars, 1901
[1897b] On the Relations of Number and Quantity, *Mind*, 6, 1897, p. 326-341; cité dans l'édition [Papers 2], p. 68-82.
[1898a] On Quantity and Allied Conceptions, [Papers 2], p. 114-135
[1898b] An Analysis of Mathematical Reasoning Being an Inquiry into the Subject-Matter, the Fundamental Conceptions, and the Necessary Postulates of Mathematics, [Papers 2], p. 155-242
[1898c] On the Constituents of Space and Their Mutual Relations, [Papers 2], p. 309-321.
[1898d] Note on Order, [Papers 2], p. 339-358.
[1898e] Les Axiomes propres à Euclide, sont-ils empiriques ?, *Revue de métaphysique et de morale*, 6, 1898, cité dans l'édition de [Papers 2], p. 420-433.
[1899a] Notes on Geometry, [Papers 2], p. 359-389.
[1899b] Miscellanous Notes : <Fragments on Series>, [Papers 2], p. 457-459
[1899c] Sur les axiomes de la géométrie, *Revue de métaphysique et de morale*, 7, 1899, p. 684-707.
[1899d] The Axioms of Geometry, original anglais de [1899c], [Papers 2], p. 394-415.
[1901] Recent Italian Works on the Foundations of Mathematics, *International Monthly*, 4, 1901, p. 83-101, cité dans l'édition de [Papers 3], p. 352-362.

[1903] *The Principles of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1903.
[1921] *The Analysis of Mind*, Londres : Allen and Unwin, 1995.

RUSSELL Bertrand, COUTURAT Louis
[1897-1913] *Bertrand Russell / Louis Couturat (1897-1913) ; Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique*, éd. A-F Schmid, Paris : Kimé, 2001.

SCHUBRING Gert éd.
[1996] *H-G. Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1996.

STAUDT Georg Karl Christian von
[1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Bauer und Raspe, 1847. Trad. italienne de M. Pieri, *Geometria di posizione* di Georgio von Staudt, avec une présentation des travaux de Staudt de C. Segre, Turin : Bocca, 1889.

TOEPELL Michael Markus
[1986] *Uber die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*, Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1986.

TORETTI Roberto
[1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.

VEBLEN Oswald et YOUNG John Wesley
[1910] *Projective Geometry vol. 1*, Boston : Ginn, 1910.
[1918] *Projective Geometry vol. 2*, Boston : Ginn, 1918.

WHITEHEAD Alfred North
[1898] *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge : Cambridge University Press, 1898, rééd. New York : Hafner, 1960.
[1906] *The axioms of projective geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906, rééd. New York : Hafner, 1971.
[1907] *The axioms of descriptive geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1907, rééd. New York : Hafner, 1971.
[1913] *Principia Mathematica, volume 3*, Cambridge : Cambridge University Press, 1913.